



**Titre:** Modèle à dépendance fréquentielle de lignes et câbles utilisant la  
Title: méthode des caractéristiques

**Auteur:** Thomas Kauffmann  
Author:

**Date:** 2014

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Kauffmann, T. (2014). Modèle à dépendance fréquentielle de lignes et câbles  
Citation: utilisant la méthode des caractéristiques [Master's thesis, École Polytechnique de  
Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/1418/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/1418/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Ilhan Kocar, & Jean Mahseredjian  
Advisors:

**Programme:** génie électrique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLE À DÉPENDANCE FRÉQUENTIELLE DE LIGNES ET CÂBLES  
UTILISANT LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

THOMAS KAUFFMANN

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)

AVRIL 2014

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

MODÈLE À DÉPENDANCE FRÉQUENTIELLE DE LIGNES ET CÂBLES UTILISANT LA  
MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

présenté par : KAUFFMANN Thomas

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de :

M. KARIMI Houshang, Ph.D., président

M. KOCAR Ilhan, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. MAHSEREDJIAN Jean, Ph.D., membre et codirecteur de recherche

M. DUFOUR Christian, Ph.D., membre

## DÉDICACE

*À mon frère*

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier l'ensemble de mes collègues et amis du département énergie électrique, pour leur soutien et la bonne ambiance de travail tout au long de ma maîtrise. Je tiens à remercier plus particulièrement Maria Isabel Silva Lafaia Simões et Baki Çetindag qui, depuis leur arrivé, ont été à mes côtés tous le temps que j'ai passé à l'école Polytechnique.

Je remercie aussi mon directeur de recherche Ilhan Kocar pour m'avoir accepté pour la maîtrise. Je tiens à souligner la confiance qu'il m'a porté, sa disponibilité et son aide tout au long de la recherche. Et je le remercie aussi pour m'avoir donné l'opportunité de donner des laboratoires durant ma maîtrise, une expérience qui a été très enrichissante.

Je remercie aussi mon codirecteur Jean Mahseredjian pour sa confiance, ses commentaires et m'avoir permis de faire cette maîtrise.

Je remercie le professeur José Luis Naredo pour ses commentaires, ses idées et suggestions lors d'un de ses séjours à l'école Polytechnique.

Je tiens aussi à remercier mes parents et mon frère pour leur soutien et leurs encouragements.

## RÉSUMÉ

La méthode des caractéristiques part des équations des télégraphistes et utilise les courbes caractéristiques pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations différentielles ordinaires, et les résoudre. Ces courbes correspondent au trajet des fronts d'onde dans les conducteurs.

Cette méthode a le mérite de présenter des avantages de vitesse comparativement à la méthode de référence utilisée actuellement qui est le modèle à dépendance fréquentielle du modèle universel de ligne (utilisé dans le logiciel EMTP-RV).

Pour connaître les vitesses modales et résoudre le système d'équations, l'impédance série et l'admittance shunt du système de transmission (ligne ou câble) sont interpolées dans le domaine fréquentiel. Cette interpolation ou lissage est déjà une source d'erreur qui peut entraîner l'apparition de vitesses modales supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide. La décomposition de l'inductance série a permis de retirer ce problème.

La simulation temporelle quant à elle montre de sérieux problèmes de précision pour les lignes aériennes et de stabilité avec les câbles souterrains. Des modifications dans la méthode de résolution du système ont été proposées et testées mais n'ont pas permis d'apporter d'améliorations notables. Aucun critère pouvant garantir la stabilité n'a pu être identifié. Les interpolations spatiales et temporelles nécessaires à la résolution sont des sources d'erreurs. L'interpolation spatiale est particulièrement critique pour les câbles. De plus les vitesses modales ne sont pas dépendantes de la fréquence.

La méthode des caractéristiques n'est donc pas encore en état pour remplacer la méthode universelle de ligne.

## ABSTRACT

The method of characteristics starts with the telegrapher's equations and uses characteristic curves to convert partial differential equations into ordinary differential equations. The system of equations is also solved on these curves which represent the propagation of waves in the transmission system.

This method can be faster than the Universal Line Model (ULM) which is implemented as a wideband model in EMTP-RV software.

To define the modal velocities and to solve the system, the series impedance and shunt admittance of the transmission system are fitted in frequency domain. The vector fitting is the first source of errors. In some cases the calculated velocities can be higher than the speed of light. A decomposition of the series inductance can remove this problem of velocity.

However, it is demonstrated in this work that the method of characteristics is prone to present significant errors in the time domain simulation of overhead lines and it has stability problems in the case of underground cables. Various modifications to the method are proposed and tested however it was not possible to introduce improvements that guarantee stable time domain simulations. This is attributed to the numerical errors associated with spatial and temporal interpolations. The spatial interpolation is particularly considered to be problematic and the main source of errors along with the assumption that the modal velocities have no frequency dependence.

Currently the method of characteristics is not able to replace efficiently the universal line model.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS .....	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT .....	VI
TABLE DES MATIÈRES .....	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	IX
LISTE DES FIGURES.....	XI
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1    DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES .....	4
1.1    Transformation modale et courbes caractéristiques .....	7
1.2    Transformation des EDP en EDO .....	12
1.3    Résolution du système d'EDO sur les courbes caractéristiques .....	15
1.4    Exemples abordés dans ce rapport .....	21
CHAPITRE 2    MÉTHODES DE LISSAGE .....	25
2.1    Lissage de l'impédance série $Z$ .....	26
2.1.1    Lissage de $Z$ : cas de la ligne aérienne .....	33
2.1.2    Lissage de $Z$ : cas des câbles souterrains .....	35
2.2    Lissage de l'admittance shunt $Y$ .....	37
2.3    Calcul des vitesses modales .....	41
2.4    Repositionnement des pôles avec un lissage pondéré .....	47
2.5    Transformation modale modifiée .....	49
2.6    Tri des pôles obtenus après les repositionnements.....	51
CHAPITRE 3    MÉTHODE DE RÉOLUTION DU SYSTÈME.....	54



3.1	Méthode standard et constatations : ligne .....	54
3.2	Méthode standard et constatations : câbles .....	69
3.3	Intégration sans interpolation spatiale.....	75
3.4	Utilisation complète du lissage de l'admittance shunt Y .....	79
3.5	Subdivision du système de transmission .....	87
CONCLUSION .....		94
RÉFÉRENCES .....		95

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1: Données sur le cas de ligne .....	22
Tableau 1.2: Données sur le cas du câbles1 .....	23
Tableau 3.1: Délai de propagation du mode le plus rapide et vitesses modales pour la cas de ligne.....	55
Tableau 3.2: Erreur maximale en régime permanent, cas de ligne (300km, $\Delta t=10\mu s$ ) .....	56
Tableau 3.3 : Erreurs (pu) pour différentes résistivité du sol pour une ligne de 300km ( $\Delta t=10\mu s$ ) .....	59
Tableau 3.4: Erreur relative maximale du lissage de <b>Z</b> (20 pôles) .....	60
Tableau 3.5: Erreur maximale en régime permanent, cas de ligne (100km, $\Delta t=10\mu s$ ) .....	62
Tableau 3.6: Erreurs (pu) pour différents $\Delta t$ pour une ligne de 100km .....	66
Tableau 3.7: Erreurs (pu) pour différents $\Delta t$ pour une ligne de 300km .....	67
Tableau 3.8: Erreurs (pu) pour différents $\Delta t$ pour une ligne de 300km (transformation modale modifiée).....	69
Tableau 3.9: Erreur maximale et en régime permanent, câbles1c (10km, $\Delta t=1\mu s$ ) .....	71
Tableau 3.10: Erreur maximale et en régime permanent, câbles1c (10km, $\Delta t=25\mu s$ ) .....	72
Tableau 3.11: Erreurs (pu) pour différents $\Delta t$ pour une ligne de 300km, méthode SIS.....	78
Tableau 3.12: Comparaison des erreurs maximales entre la méthode standard et celle avec <b>Y</b> complet ( <b>Y</b> : 5 pôles) (cas de ligne) .....	86
Tableau 3.13: Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour une ligne de 300km (20 pôles, $\Delta t=20\mu s$ ) .....	90
Tableau 3.14 : Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour une ligne de 300km (20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ) .....	90
Tableau 3.15 : Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour une ligne de 300km (20 pôles, $\Delta t=1\mu s$ ) .....	91

Tableau 3.16 : Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour un câble1c de 10km (30 pôles) pour différents pas de temps et nombre de subdivision .....	92
---	----

## LISTE DES FIGURES

Figure 1-1: Courbes caractéristiques dans le plan (x,t) .....	10
Figure 1-2: Intégration des EDO sur les courbes caractéristiques : J.C. Escamilla, 2013 [15] ....	16
Figure 1-3: Modèle de Norton d'un système de transmission .....	21
Figure 1-4: Configuration de la ligne aérienne .....	22
Figure 1-5: Circuit électrique utilisé pour les simulations de la ligne .....	22
Figure 1-6: Disposition des câbles1 .....	23
Figure 1-7: Circuit électrique utilisé pour les simulations du câble1 .....	24
Figure 2-1: Evolution de la valeur d'un pôle en fonction du repositionnement (ligne, 20 pôles) .....	31
Figure 2-2: Evolution de la valeur d'un pôle en fonction du repositionnement (câble1a, 30 pôles) .....	31
Figure 2-3: Lissage pour le cas de ligne, 15 pôles, élément (2,1) .....	33
Figure 2-4: Erreur de lissage (cas de ligne) en fonction du nombre de pôle .....	34
Figure 2-5: Lissage de Câble1a, 20 pôles, élément (2,2) .....	35
Figure 2-6: Erreur de lissage (câble1a) en fonction du nombre de pôles : échelle linéaire (a) et logarithmique (b) .....	36
Figure 2-7: Comparaison $\mathbf{Y}/s$ et $\mathbf{C}$ , élément (1,1) (ligne) .....	38
Figure 2-8: Valeur de $\mathbf{Y}/s$ (élément (1,1)) en fonction de la fréquence (câble1) .....	39
Figure 2-9: Évolution des vitesses modales en fonction du nombre de pôle pour $\mathbf{Z}$ (ligne) .....	41
Figure 2-10: Erreur de lissage de $\mathbf{Z}$ (cas de ligne) avec (1) et sans conditionnement (2) .....	42
Figure 2-11: Vitesses modales en fonction du nombre de pôle de $\mathbf{Z}$ (ligne) avec conditionnement .....	42
Figure 2-12: Erreur de lissage de $\mathbf{Z}$ (câble1c) avec (1) et sans conditionnement (2) .....	43

Figure 2-13: Vitesses modales sans conditionnement (câble1c) : toutes (a), et les 4, 5 et 6 seules (b) .....	44
Figure 2-14: Vitesses modales avec conditionnement (câble1c) : toutes (a), et les 4, 5 et 6 seules (b) .....	45
Figure 2-15: Vitesses modales (câble1a) .....	46
Figure 2-16: Evolution d'un pôle en fonction du repositionnement, 20 pôles (ligne).....	48
Figure 2-17: Evolution d'un pôle en fonction du repositionnement, 30 pôles (câble1a) .....	48
Figure 2-18: Évolution des vitesses modales en fonction du nombre de pôles (transformation modale modifiée).....	50
Figure 2-19: Comparaison des pulsations et pôles extrêmes (câble1c): HF (a) et BF (b) .....	51
Figure 2-20: Comparaison des vitesses modales avec conditionnement (câble1c), tous les pôles (1,2,3) et sans le pôle haute-fréquence (1a,2a,3a) .....	52
Figure 2-21: Erreurs de lissage de $\mathbf{Z}$ avec conditionnement (câble1c), standard (2) et avec retrait du pôle HF (1).....	53
Figure 3-1. Circuit électrique pour l'alimentation de la ligne aérienne .....	54
Figure 3-2: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (300km, 20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ) ...	55
Figure 3-3: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne ( $\Delta t=10\mu s$ ) : 5 pôles (a), 20 pôles (b) .....	56
Figure 3-4: Zoom sur les premiers pas de temps, simulation des tensions, cas de ligne (300km, 20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ) .....	57
Figure 3-5 : Comparaison entre EMTP-RV et MdC pour le cas de ligne monophasée (20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ).....	58
Figure 3-6 : Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, ligne monophasée (20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ) .....	58
Figure 3-7 : Lissage de $\mathbf{Z}$ pour le cas de ligne ( $\rho_{sol} = 104 \Omega \cdot m$ ), 20 pôles, élément (2,1) .....	60
Figure 3-8: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (100km, 20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ) ...	61

Figure 3-9: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne (100km, $\Delta t=10\mu s$ ) :	
5 pôles (a), 20 pôles (b).....	62
Figure 3-10: Comparaison de différent pas de temps, cas de ligne, tension VR2 (20 pôles, 300km) : première oscillation (a), sommet d'une sinusoïde en régime permanent (b).....	63
Figure 3-11. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne, $\Delta t=1\mu s$ (100km) :	
5 pôles (a), 20 pôles (b).....	64
Figure 3-12. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne, $\Delta t=2\mu s$ (100km) :	
5 pôles (a), 20 pôles (b).....	64
Figure 3-13. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne, $\Delta t=20\mu s$ (100km) :	
5 pôles (a), 20 pôles (b).....	65
Figure 3-14. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne, $\Delta t=50\mu s$ (100km) :	
5 pôles (a), 20 pôles (b).....	65
Figure 3-15. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne, $\Delta t=100\mu s$ (100km) :	
5 pôles (a), 20 pôles (b).....	66
Figure 3-16: Erreur maximale VR1 (20 pôles, 100km) en fonction de $\Delta t$ .....	68
Figure 3-17: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas câble1c (10km, 30 pôles, $\Delta t=1\mu s$ ).....	70
Figure 3-18: Erreur de courant (tension de 1pu), 30 pôles, $\Delta t=1\mu s$ .....	71
Figure 3-19: Stabilité du modèle en fonction du pas de temps $\Delta t$ (câble1c, 10km, 30 pôles).....	72
Figure 3-20: Stabilité du modèle en fonction du pas de temps $\Delta t$ (câble1c, 30km, 30 pôles).....	73
Figure 3-21: Stabilité du modèle en fonction du ratio $\tau/\Delta t$ (câble1c, 30km, 30 pôles).....	74
Figure 3-22: Intégration des EDO sans interpolation spatiale sur les courbes caractéristiques....	77
Figure 3-23: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne, $\Delta t=10\mu s$ (300km, 20 pôles), Méthode SIS.....	78
Figure 3-24: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne (300km, $\Delta t=10\mu s$ , <b>Z</b> : 20 pôles, <b>Y</b> : 5 pôles).....	85
Figure 3-25 : Schéma de Norton pour un système divisé en deux modèles identiques.....	87

Figure 3-26: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (300km) divisée en 20 sections (20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ) .....	88
Figure 3-27 : Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (300km) divisée en 20 sections (20 pôles, $\Delta t=10\mu s$ ) .....	89
Figure 3-28 : Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et MdC, cas de câble1c (10km) divisée en 10 sections (30 pôles, $\Delta t=1\mu s$ ) .....	93

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

EDO	Équation Différentielle Ordinaire
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
MdC	Méthode des Caractéristiques
RP	Régime Permanent
SIS	Sans Interpolation Spatiale
ULM	Modèle universel de ligne (Universal Line Model)



## INTRODUCTION

Les réseaux électriques doivent supporter une charge de plus en plus importante tout en étant de plus en plus fiable. C'est-à-dire être capable de transférer de plus grande puissance tout en maintenant les niveaux de tension dans la plage acceptable et en réduisant au maximum la durée des coupures potentielles.

A partir de ces éléments, il devient clair que le comportement précis des différents équipements des réseaux devient un point crucial.

Pour les niveaux de tension, ils sont calculés à partir des flux de puissance et des charges sur le réseau. Il s'agit alors de calcul d'écoulement de puissance (load flow). Les coupures sont dues à des phénomènes de surtensions et surintensités qui vont déclencher les systèmes de protection. Ces phénomènes peuvent être de différentes natures et sont divisés en trois catégories : temporaire, à front lent, à front rapide [1]. Le premier est de longue durée mais de faible ampleur alors que le dernier est de courte durée mais d'ampleur plus importante. En connaissant et calculant ces phénomènes, il est possible d'améliorer les systèmes de protection ou de gérer le réseau afin d'éviter ces phénomènes.

Le but de ce projet est de caractériser la formation et la propagation de ces phénomènes dans les lignes aériennes et les câbles souterrains qui servent aux transports de l'énergie électrique. En effet les lignes aériennes peuvent être sujettes à des chocs de foudre qui sont des phénomènes à front rapide. Ces chocs sont des phénomènes hors de tout contrôle contrairement aux phénomènes à front lent qui sont dus à des modifications volontaires de la configuration du réseau. Ils peuvent être dus à l'enclenchement d'une ligne de transport à vide, au débranchement d'une forte charge inductive ou de l'élimination d'un défaut.

La caractérisation de ces phénomènes peut déjà être réalisée avec le logiciel EMTP-RV [2]. Ce logiciel utilise un modèle à dépendance fréquentielle (Wideband) appliqué au modèle universel de ligne (Universal Line Model ou ULM) [3]. Ce logiciel a subi plusieurs améliorations [4] [5] [6] [7] et est devenu le logiciel de référence pour le calcul des phénomènes transitoires. Récemment des optimisations des calculs ont permis de rendre le modèle fréquentiel applicable en temps réel [8].

Avec ce modèle, les lignes et câbles sont représentés dans le domaine fréquentiel de la manière suivante:

$$\mathbf{I}_0 - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_0 = -\mathbf{H}(\mathbf{I}_L + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_L) \quad (1)$$

$$\mathbf{I}_L - \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_L = -\mathbf{H}(\mathbf{I}_0 + \mathbf{Y}_c \mathbf{V}_0) \quad (2)$$

L'indice 0 et  $L$  correspondent aux deux extrémités de la ligne.  $\mathbf{Y}_c$  est la matrice d'admittance caractéristique et  $\mathbf{H}$  est la matrice de propagation.

Cette méthode ne sera bien sûr pas détaillée ici. Mais il faut noter que le calcul de la matrice  $\mathbf{H}$  est complexe et délicat, et qu'il y a deux produits de convolutions par extrémité pour chaque pas de temps de la simulation temporelle.

Dans ce mémoire, une nouvelle méthode de calcul est testée. Elle sera comparée au logiciel EMTP-RV qui utilise la méthode présentée précédemment.

Il s'agit de la méthode des caractéristiques [9]. Cette méthode a aussi subi plusieurs améliorations depuis plusieurs années. Elle a d'abord été implémentée avec des paramètres sans dépendance fréquentielle [10]. La dépendance fréquentielle a été ajoutée avec des modèles comportant des éléments non-linéaires [11], des lignes excitées par des champs externes [12], des lignes non-uniformes [13]. Mais dans tous ces cas, la méthode des caractéristiques (MdC) nécessite une discrétisation spatiale de la ligne en plus de la discrétisation temporelle. Ceci rendait cette méthode lente comparativement à l'ULM.

Une amélioration a permis de retirer la discrétisation spatiale de la méthode ce qui a permis d'augmenter grandement la vitesse de calcul. Cette nouvelle version donne de bons résultats dans le cas d'une ligne monophasée [14] et à  $n$  phases [15].

L'objectif de ce mémoire est de vérifier le cas de ligne à  $n$  phases et de tester le modèle sur les câbles souterrains.

Cette méthode part des équations des télégraphistes en utilisant la matrice d'impédance série et d'admittance shunt qui sont dépendantes de la fréquence. L'élément clé de la méthode est la

transformation du système d'équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) en un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) grâce aux courbes caractéristiques.

Dans les cas où la discrétisation spatiale était nécessaire, une interpolation quadratique dans l'espace était réalisée pour obtenir les tensions et courants sur ces courbes caractéristiques. Sans cette discrétisation, une interpolation dans l'espace est toujours nécessaire, mais celle-ci est linéaire (comme il n'y a que les deux extrémités où les valeurs sont disponibles).

Les détails de la méthode sont présentés dans le Chapitre 1.

Les avantages en vitesse de calculs de la MdC comparativement au modèle universel de ligne justifient son utilisation. Cette méthode ne nécessite le calcul que d'un produit de convolution par extrémité et par pas de temps.

Comme dans le cas du modèle universel de ligne, deux matrices à dépendance fréquentielle doivent être interpolées. Les matrices  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Y}$  de la méthode caractéristique sont beaucoup plus lisses que les éléments de  $\mathbf{Y}_c$  et  $\mathbf{H}$  qui peuvent avoir de fortes oscillations en fonctions de la fréquence. De plus comme les courbes à interpoler sont plus lisses, elles nécessitent moins de pôles pour être lissées, ce qui permet de réduire par la suite les temps de calcul. Les méthodes d'interpolation ainsi que des exemples numériques de lissage sont développés dans le Chapitre 2

Après plusieurs simulations de lignes et câbles avec la méthode des caractéristiques présentées dans le Chapitre 3, plusieurs éléments imposaient de modifier la méthode initiale. Des variantes à la méthode initiale ont alors été développées et testées.

## CHAPITRE 1 DESCRIPTION DE LA MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

La dépendance fréquentielle du modèle se base sur les équations des télégraphistes :

$$-\frac{d\mathbf{V}(x,s)}{dx} = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(x,s), \quad -\frac{d\mathbf{I}(x,s)}{dx} = \mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(x,s) \quad (3)$$

où  $\mathbf{V}(x,s)$  et  $\mathbf{I}(x,s)$  sont respectivement les vecteurs colonnes de tensions et courants. Pour un système à  $n$  conducteurs, ils sont chacun de dimension  $n$ .

Où  $\mathbf{Z}(s)$  est la matrice d'impédance série par unité de longueur ( $\Omega/\text{m}$ ) et  $\mathbf{Y}(s)$  la matrice d'admittance shunt aussi par unité de longueur ( $\text{S}/\text{m}$ ). Chacune de ces deux matrices est de dimension  $n \times n$ .

A partir des données des conducteurs (type de conducteur, diamètre, matériaux, emplacement relatif), les valeurs de ces matrices sont calculées pour plusieurs échantillons de fréquence : généralement entre 10 et 20 échantillons par décade, des mHz aux MHz. Ce point est traité plus en détails dans le Chapitre 2.

Comme l'impédance et l'admittance ne sont connues que pour des valeurs discrètes. Il est nécessaire de réaliser une interpolation pour avoir des valeurs pour toute valeur de fréquence dans la plage indiquée précédemment. Par conséquent, l'ensemble des éléments de ces deux matrices doivent être lissés. La matrice d'impédance série va être lissée de la manière suivante :

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{R}_{DC} + s \left( \mathbf{D} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{K}_i}{s - p_i} \right) \quad (4)$$

La matrice d'admittance shunt va être approximée de la même manière :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_{DC} + s \left( \mathbf{C} + \sum_{i=1}^{Ny} \frac{\mathbf{K}_{Y,i}}{s - p_{Y,i}} \right) \quad (5)$$

La matrice  $\mathbf{R}_{DC}$  correspond à la résistance interne des conducteurs (par unité de longueur), elle est une matrice diagonale. La matrice  $\mathbf{G}_{DC}$  correspond à la conductance (par unité de longueur) entre les conducteurs et la terre pour un courant continu.

Les matrices  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{C}$  sont les résidus lorsque  $s$  tend vers l'infini.

Les scalaires  $p_i$  et  $p_{Y,i}$  sont les pôles du lissage. À chacun de ces pôles est associé un résidu  $\mathbf{K}_i$  pour l'impédance et  $\mathbf{K}_{Y,i}$  pour l'admittance. Pour ne pas avoir d'éléments instable lors de la transformation dans le domaine temporel ( $\mathbf{K}_i e^{p_i t}$ ), l'ensemble des pôles doivent avoir leur partie réelle strictement négative. De plus, comme les éléments des matrices  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Y}$  sont relativement lisses sur la plage de fréquence étudiée, des pôles réels sont suffisants pour le lissage. Par conséquent, les pôles vont être pris réels et strictement négatifs.

L'ensemble des matrices de caractérisation de  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{Y}$ :  $\mathbf{R}_{DC}$ ,  $\mathbf{G}_{DC}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}_i$  et  $\mathbf{K}_{Y,i}$  sont réelles.

Comme les éléments  $\mathbf{G}_{DC}$  et  $\mathbf{K}_{Y,i}$  sont négligeables comparativement à  $\mathbf{C}$ , la forme suivante va être retenue pour la matrice d'admittance shunt :

$$\mathbf{Y}(s) = s\mathbf{C} \quad (6)$$

Les matrices lissées sont maintenant injectées dans les équations des télégraphistes (3):

$$\frac{d\mathbf{V}(x,s)}{dx} + \left[ \mathbf{R}_{DC} + s \left( \mathbf{D} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{K}_i}{s - p_i} \right) \right] \mathbf{I}(x,s) = \mathbf{0} \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{I}(x,s)}{dx} + \mathbf{C} s \mathbf{V}(x,s) = \mathbf{0} \quad (8)$$

L'équation avec l'impédance série (7) est simplifiée :

$$\frac{d\mathbf{V}(x,s)}{dx} + \mathbf{R}_{DC} \mathbf{I}(x,s) + \mathbf{D} s \mathbf{I}(x,s) + s \left( \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{K}_i}{s - p_i} \right) \mathbf{I}(x,s) = \mathbf{0} \quad (9)$$

Les équations (8) et (9) sont ensuite converties dans le domaine temporel :

$$\frac{\partial \mathbf{i}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{i}(x, t)}{\partial t} + \mathbf{R}_{DC} \mathbf{i}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{i}(x, \tau) d\tau = \mathbf{0} \quad (11)$$

où

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{i=1}^N e^{p_i t} \mathbf{K}_i \quad (12)$$

La règle de Leibnitz est ensuite appliquée à (11) pour simplifier le produit de convolution:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{i}(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial \mathbf{h}(t - \tau)}{\partial t} \mathbf{i}(\tau) d\tau + \mathbf{h}_0 \mathbf{i}(\tau) \quad (13)$$

$$\mathbf{h}_0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{K}_i e^{p_i t} \quad (14)$$

On arrive alors à l'expression suivante pour l'équation (11) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{i}(x, t)}{\partial t} + \mathbf{R}_h \mathbf{i}(x, t) + \mathbf{\Psi}(x, t) = \mathbf{0} \quad (15)$$

où

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{R}_{DC} + \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_i \quad (16)$$

$$\mathbf{\Psi}(x, t) = \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{K}_i [e^{p_i t} * \mathbf{i}(x, t)] \quad (17)$$

Les expressions (10) et (15) sont les deux équations aux dérivées partielles (EDP) qui régissent le système.

Pour pouvoir utiliser la méthode caractéristique, le système doit être converti dans le domaine modal. En effet les vitesses modales qui vont être calculées par la suite, sont essentielles à la résolution par la méthode des caractéristiques.

## 1.1 Transformation modale et courbes caractéristiques

On repart des deux équations des télégraphistes, en dérivant l'une et en l'injectant dans la seconde, et en répétant l'opération avec la seconde équation, on arrive à:

$$\frac{d^2 \mathbf{V}(x, s)}{dx^2} = \mathbf{Z}(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{V}(x, s), \quad \frac{d^2 \mathbf{I}(x, s)}{dx^2} = \mathbf{Y}(s)\mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(x, s) \quad (18)$$

L'objectif du passage dans le domaine modal est la diagonalisation des produits  $\mathbf{ZY}$  et  $\mathbf{YZ}$  et ainsi obtenir un découplage des équations. Les deux équations précédentes peuvent alors être converties dans le domaine modal avec les matrices de transformation qui sont dans un premier temps appelées  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  :

$$\frac{d^2 \mathbf{V}_m}{dx^2} = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{ZY} \mathbf{T}_1 \mathbf{V}_m, \quad \frac{d^2 \mathbf{I}_m}{dx^2} = \mathbf{T}_2^{-1}\mathbf{YZ} \mathbf{T}_2 \mathbf{I}_m \quad (19)$$

On constate alors que la matrice  $\mathbf{T}_1$  correspond à la matrice de transformation de la tension dans le domaine modal. Et de la même manière on voit que la matrice  $\mathbf{T}_2$  correspond à la matrice de transformation du courant dans le domaine modal :

$$\frac{d^2 \mathbf{T}_1 \mathbf{V}_m}{dx^2} = \mathbf{ZY} \mathbf{T}_1 \mathbf{V}_m, \quad \frac{d^2 \mathbf{T}_2 \mathbf{I}_m}{dx^2} = \mathbf{YZ} \mathbf{T}_2 \mathbf{I}_m$$

Les matrices  $\mathbf{T}_V$  et  $\mathbf{T}_I$  sont utilisées comme matrices de transformation pour convertir respectivement les tensions et les courants dans le domaine modal.

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{T}_V \mathbf{v}_m(x, t) \quad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m(x, t) \quad (20)$$

Les matrices de transformation ainsi présentées sont dépendantes de la fréquence comme **Y** et **Z** le sont aussi. Pour la méthode des caractéristiques, seuls les résidus lorsque  $s$  tend vers l'infini, de ces deux matrices sont utilisés (les matrices **C** et **D**).

On définit les matrices **T<sub>V</sub>** et **T<sub>I</sub>** qui diagonalise respectivement les produits **DC** et **CD**: Il n'y a pas de justification mathématique sur le fait que ces deux produits soient diagonalisables, mais cela était le cas pour l'ensemble des cas étudiés.

$$\mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{DCT}_V = \mathbf{\Lambda} \quad (21)$$

$$\mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{CDT}_I = \mathbf{\Lambda} \quad (22)$$

Les valeurs propres de **DC** et **CD** sont identiques. La justification est la suivante :

Soit  $\lambda$  une valeur propre non nulle de **CD**, et **v** son vecteur propre associé (vecteur non nul). Par définition, on a :

$$(\mathbf{CD})\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (23)$$

$$(\mathbf{DCD})\mathbf{v} = \mathbf{D}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{Dv}) \quad (24)$$

$$\mathbf{DC}(\mathbf{Dv}) = \lambda(\mathbf{Dv}) \quad (25)$$

On a par conséquent que **Dv** est un vecteur propre de **DC** pour la valeur propre  $\lambda$ .

Un produit **Dv** nul impliquerait que **v** soit aussi nul :

$$\lambda\mathbf{v} = \mathbf{CDv} = \mathbf{0} \quad (26)$$

Comme **Dv** est non nul,  $\lambda$  est aussi une valeur propre de **DC**.

*Au niveau du code Matlab comme les deux diagonalisations sont réalisées séparément, l'ordre des valeurs propres peut être différent. Dans ce cas, une diagonalisation est prise comme référence, par exemple l'ordre des valeurs propres correspondant à la matrice de transformation*



$\mathbf{T}_V$  de l'équation (21). Puis les vecteurs de l'autre matrice de transformation  $\mathbf{T}_I$  sont interchangés pour obtenir le même ordre des valeurs propres.

La prochaine étape est de transformer les deux équations différentielles partielles couplées (10) et (15) dans le domaine modal :

$$\mathbf{T}_I \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial x} + \mathbf{C} \mathbf{T}_V \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (27)$$

Pour l'équation (15), on substitue  $\Psi$  à son expression (17):

$$\mathbf{T}_V \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial x} + \mathbf{D} \mathbf{T}_I \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \mathbf{R}_h \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m + \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{K}_i [e^{p_i t} * \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m] = \mathbf{0} \quad (28)$$

On obtient alors les deux équations différentielles dans le domaine modal :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial x} + \mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial x} + \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m + \Psi_m = \mathbf{0} \quad (30)$$

avec

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_V \quad \mathbf{D}_m = \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}_I \quad \mathbf{R}_m = \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{R}_h \mathbf{T}_I \quad (31)$$

$$\Psi_m = \mathbf{T}_V^{-1} \sum_{i=1}^N p_i \mathbf{K}_i [e^{p_i t} * \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m] \quad (32)$$

$\Lambda$  est une matrice diagonale dont tous ses éléments diagonaux sont non nuls, et la dimension physique de ses éléments est  $s^2 m^{-2}$ . Par conséquent les vitesses des modes peuvent être obtenues avec la relation suivante :

$$\mathbf{\Gamma} = \sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \quad (33)$$

En prenant l'ensemble des  $\gamma_i$  positifs.

Les modes se déplacent dans la ligne dans les deux sens. En définissant l'axe  $x$  dans un sens, les vitesses dans le sens contraire seront négatives. Ainsi sont définies les deux familles de courbes caractéristiques :

$$\frac{dx_i}{dt} = \pm \gamma_i \quad (34)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \pm \text{diag}\left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right) \quad (35)$$

Voici un exemple de courbes caractéristiques pour un seul mode, une seule vitesse modale. En bleu les pentes positives (ondes incidentes) et en noir les pentes négatives (ondes réfléchies).

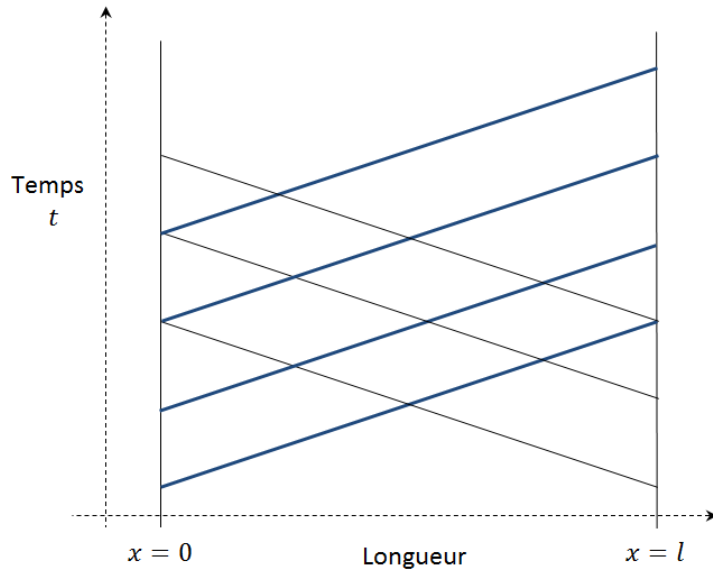


Figure 1-1: Courbes caractéristiques dans le plan  $(x,t)$

Comme  $\mathbf{\Lambda}$  est diagonale avec tous ses éléments non-nuls, elle est inversible. Comme un changement de base n'a pas d'influence sur l'inversibilité, les produits  $\mathbf{DC}$  et  $\mathbf{CD}$  sont aussi inversibles. Comme le rang d'un produit de matrice est inférieur ou égal au rang le plus faible de chacune des matrices, les matrices  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont de rang plein.  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  sont donc aussi inversibles.

De (21), on a :

$$\mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{D} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{C}^{-1} \quad (36)$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}_I = \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}_I = \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_m^{-1} \quad (37)$$

De (22), on a :

$$\mathbf{D} \mathbf{T}_I = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}_I \mathbf{\Lambda} \quad (38)$$

$$\mathbf{D}_m = \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}_I = \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{T}_I \mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{\Lambda} \quad (39)$$

On obtient alors :

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{C}_m^{-1} = \mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{\Lambda} \quad (40)$$

De même en inversant (37) et (39) et en isolant  $\mathbf{C}_m$  :

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{D}_m^{-1} = \mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{\Lambda} \quad (41)$$

Comme  $\mathbf{\Lambda}$  est diagonal et commute, les matrices  $\mathbf{D}_m$  et  $\mathbf{C}_m$  sont aussi diagonales.

On peut alors aussi noter la propriété suivante :

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}_m \mathbf{D}_m = \mathbf{D}_m \mathbf{C}_m \quad (42)$$

Pour la suite, on définit la matrice des impédances d'onde comme suit :

$$\mathbf{Z}_w = \sqrt{\mathbf{D}_m \mathbf{C}_m^{-1}} \quad (43)$$

Qui est aussi une matrice diagonale dont l'ensemble des éléments diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible. On peut alors identifier les expressions suivantes qui seront utiles dans la suite des calculs :

$$\mathbf{\Gamma} = \sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}} = \sqrt{\mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{C}_m^{-1}} = \sqrt{\mathbf{C}_m^{-1} \mathbf{D}_m^{-1}} \quad (44)$$

$$\mathbf{D}_m \mathbf{\Gamma} = \mathbf{D}_m \sqrt{\mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{C}_m^{-1}} = \sqrt{\mathbf{D}_m \mathbf{C}_m^{-1}} = \mathbf{Z}_w \quad (45)$$

$$\mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_m = \sqrt{\mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{C}_m^{-1}} \mathbf{C}_m = \sqrt{\mathbf{D}_m^{-1} \mathbf{C}_m} = \mathbf{Z}_w^{-1} \quad (46)$$

## 1.2 Transformation des EDP en EDO

L'étape clé peut maintenant être réalisée. Il s'agit de la transformation des deux équations aux dérivées partielles, en deux équations différentielles ordinaires ne comportant que des dérivées par rapport au temps. Une propriété indispensable à cette transformation est que la vitesse des ondes est constante dans les conducteurs, c'est-à-dire que la vitesse ne dépend pas de l'emplacement sur la ligne.

$$d\mathbf{v}_m = d\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} dt \quad (47)$$

où  $d\mathbf{X}$  est une matrice carré définie dans (49).

A partir de (30) on remplace la dérivée partielle spatiale de la tension:

$$d\mathbf{v}_m = d\mathbf{X} \left( -\mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} - \mathbf{R}_m \mathbf{i} - \mathbf{\Psi}_m \right) + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} dt \quad (48)$$

Pour une pente positive, on a :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{\Gamma} dt \quad (49)$$

On obtient alors :

$$d\mathbf{v}_m = \left( -\mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{R}_m \mathbf{i} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Psi}_m \right) dt + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} dt \quad (50)$$

En utilisant (45) et en divisant par  $dt$ , on obtient :

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} = -\mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} - \mathbf{\Gamma R}_m \mathbf{i} - \mathbf{\Gamma \Psi}_m + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \quad (51)$$

Le même procédé est réalisé avec le vecteur des courants, et toujours avec la pente positive :

$$d\mathbf{i}_m = d\mathbf{X} \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (52)$$

A partir de (29) on remplace la dérivée partielle spatiale de courant :

$$d\mathbf{i}_m = d\mathbf{X} \left( -\mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (53)$$

$$d\mathbf{i}_m = \left( -\mathbf{\Gamma C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (54)$$

En utilisant (46) et en divisant  $dt$ , on obtient :

$$\frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = -\mathbf{Z}_w^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} \quad (55)$$

$$\mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} \quad (56)$$

Les équations (51) et (56) sont alors additionnées :

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} + \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = -\mathbf{\Gamma R}_m \mathbf{i}_m - \mathbf{\Gamma \Psi}_m$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} + \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} + \mathbf{\Gamma R}_m \mathbf{i}_m + \mathbf{\Gamma \Psi}_m = \mathbf{0} \quad (57)$$

On obtient une première EDO pour les pentes positives.

On repart de (48), mais on prend un signe négatif: pente négative, onde partant l'extrémité réceptrice vers l'extrémité émettrice.

$$d\mathbf{X} = -\Gamma dt \quad (58)$$

$$d\mathbf{v}_m = \left( \Gamma \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i} + \Gamma \Psi_m \right) dt + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} dt \quad (59)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} = \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i} + \Gamma \Psi_m + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \quad (60)$$

On reprend (53), et on applique la pente négative :

$$d\mathbf{i}_m = \left( \Gamma \mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (61)$$

$$\frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = \mathbf{Z}_w^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} \quad (62)$$

$$\mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} \quad (63)$$

L'équation (63) est soustraite à (60):

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} - \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m + \Gamma \Psi_m$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} - \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} - \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m - \Gamma \Psi_m = 0 \quad (64)$$

Et ainsi la seconde EDO pour les pentes négatives est obtenue.

Finalement le système précédent de deux EDP couplées est transformé en un système de deux EDO :

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} + \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} + \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m + \Gamma \Psi_m = 0 \quad (57)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} - \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} - \mathbf{\Gamma R}_m \mathbf{i}_m - \mathbf{\Gamma \Psi}_m = \mathbf{0} \quad (64)$$

La première correspond aux ondes circulant dans le sens de l'axe x, et la seconde les ondes circulant dans le sens contraire.

### 1.3 Résolution du système d'EDO sur les courbes caractéristiques

Pour la résolution de ces deux EDO, on définit  $\tau$  comme le temps que prend le mode le plus rapide pour parcourir l'ensemble de la ligne. Les EDO sont résolues avec la méthode trapézoïdale entre les deux extrémités de la ligne pendant une durée  $\tau$ .

$$\frac{\mathbf{v}_{R,m}^t - \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau}}{\tau} + \mathbf{Z}_w \frac{\mathbf{i}_{R,m}^t - \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}}{\tau} + \mathbf{\Gamma R}_m \left( \frac{\mathbf{i}_{R,m}^t + \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}}{2} \right) + \mathbf{\Gamma} \left( \frac{\mathbf{\Psi}_{R,m}^t + \mathbf{\Psi}_{S,m}^{t-\tau}}{2} \right) = \mathbf{0} \quad (65)$$

$$\frac{\mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau}}{\tau} - \mathbf{Z}_w \frac{\mathbf{i}_{S,m}^t - \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}}{\tau} - \mathbf{\Gamma R}_m \left( \frac{\mathbf{i}_{S,m}^t + \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}}{2} \right) - \mathbf{\Gamma} \left( \frac{\mathbf{\Psi}_{S,m}^t + \mathbf{\Psi}_{R,m}^{t-\tau}}{2} \right) = \mathbf{0} \quad (66)$$

Deux problèmes se posent à présent. Le premier est que ce système est résolu tous les pas de temps  $\Delta t$ . Par conséquent selon les valeurs de  $\tau$  et de  $\Delta t$ ,  $t - \tau$  ne correspond pas forcément à pas calculé précédemment. Une interpolation linéaire temporelle est alors réalisée avec le pas de temps antérieur et postérieur à  $t - \tau$ . De plus, pour voir les aller et retour de l'onde, le pas de temps  $\Delta t$  doit être inférieur à  $\tau$ .

Le second problème qui se pose maintenant est que, comme on différencie sur une durée  $\tau$ , de  $t$  à  $t - \tau$  seuls les courants et tensions du mode le plus rapide ( $\gamma_1$  sur Figure 1-2) sont effectivement à une extrémité de la ligne. Pour les autres modes, une interpolation linéaire spatiale est utilisée avec les valeurs des deux extrémités à  $t - \tau$ .

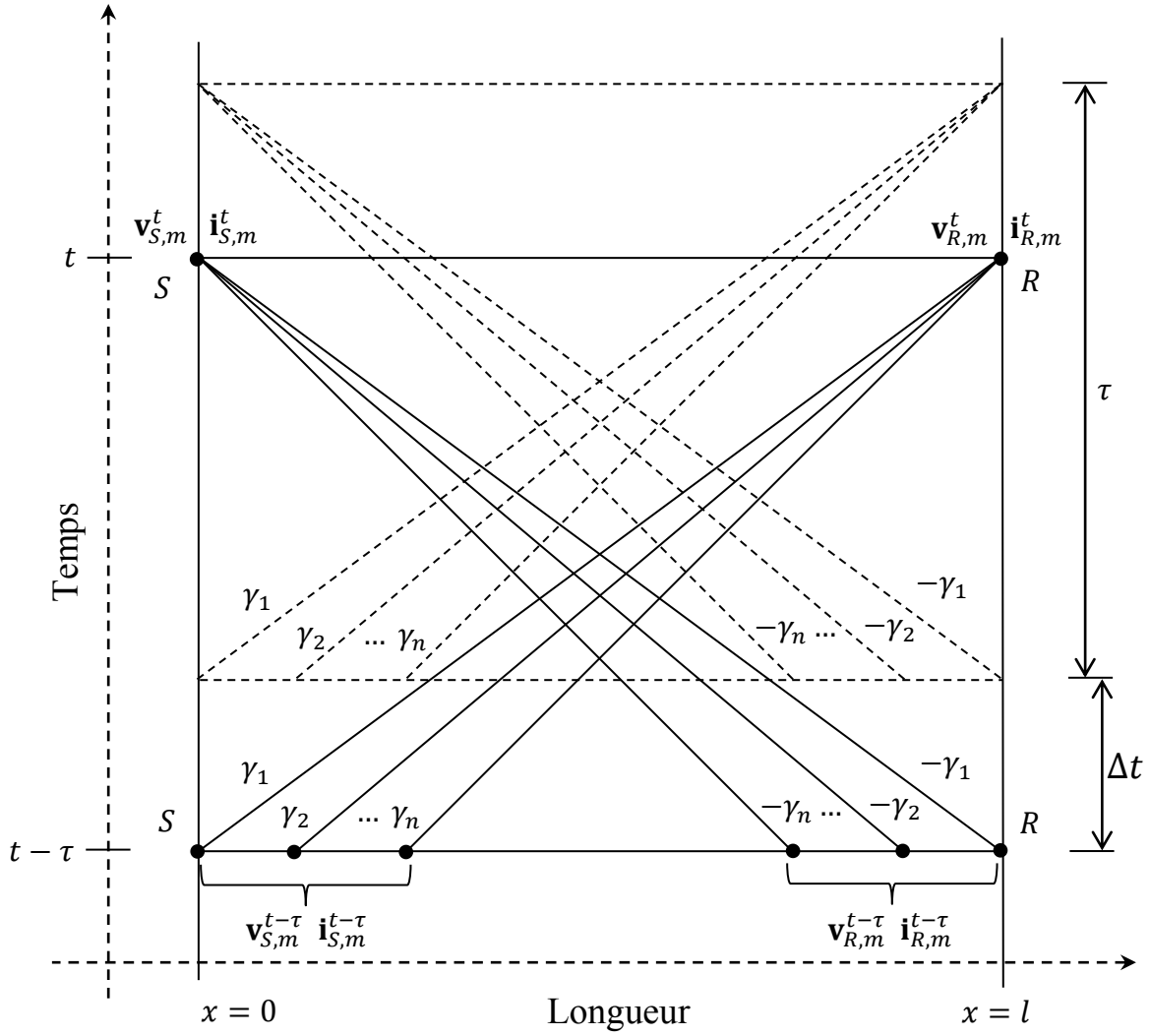


Figure 1-2: Intégration des EDO sur les courbes caractéristiques : J.C. Escamilla, 2013 [15]

On définit aussi la matrice diagonale  $\mathbf{l}$  qui contient la distance parcourue par chacun des modes pendant une durée  $\tau$ .

$$\mathbf{l} = \tau \mathbf{\Gamma} \quad (67)$$

Pour le mode le plus rapide, la distance parcourue sera donc égale à la longueur de la ligne.

$$h_{R,j}^{t-\tau} = h_{R,j}^{t-\tau} + (h_{S,j}^{t-\tau} - h_{R,j}^{t-\tau}) * l_{interpol,j} \quad (68)$$



$$h_{S,j}^{t-\tau} = h_{S,j}^t + (h_{R,j}^{t-\tau} - h_{S,j}^t) * l_{interpol,j} \quad (69)$$

$$l_{interpol,j} = \frac{1}{L} (L - l_{jj}) \quad (70)$$

où  $h$  représente la tension ou le courant et  $l_{interpol,j}$  le ratio d'interpolation, le tout du  $j$ -ième mode.

En multipliant par  $\tau$  et en utilisant (67) les équations (65) et (66) deviennent :

$$\mathbf{v}_{R,m}^t - \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau} + \mathbf{Z}_w(\mathbf{i}_{R,m}^t - \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}) + \frac{l}{2} \mathbf{R}_m(\mathbf{i}_{R,m}^t + \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}) + \frac{l}{2} (\boldsymbol{\Psi}_{R,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{S,m}^{t-\tau}) = \mathbf{0} \quad (71)$$

$$\mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau} + \mathbf{Z}_w(\mathbf{i}_{S,m}^t - \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}) + \frac{l}{2} \mathbf{R}_m(\mathbf{i}_{S,m}^t + \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}) + \frac{l}{2} (\boldsymbol{\Psi}_{S,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{R,m}^{t-\tau}) = \mathbf{0} \quad (72)$$

Les paramètres  $\boldsymbol{\Psi}$  correspondent aux produits de convolution. Ils sont calculés grâce à une méthode récursive.

#### Convolution récursive :

L'expression (32) remplacée dans le domaine fréquentiel donne :

$$\boldsymbol{\Psi}_m(x, s) = \mathbf{T}_V^{-1} \sum_{i=1}^{Norder} \left( \frac{p_i \mathbf{K}_i}{s - p_i} \right) \mathbf{T}_I \mathbf{I}_m(x, s) \quad (73)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_m(x, s) = \sum_{i=1}^{Norder} \boldsymbol{\Psi}_i(x, s) \quad (74)$$

où

$$\boldsymbol{\Psi}_i(x, s) = \frac{p_i}{s - p_i} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{K}_i \mathbf{T}_I \mathbf{I}_m(x, s) \quad (75)$$

Cette expression est alors transformée et remplacée dans le domaine temporel :

$$(s - p_i)\Psi_i(x, s) = p_i \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{K}_i \mathbf{T}_I \mathbf{I}_m(x, s) \quad (76)$$

$$\frac{d}{dt} \Psi_i(x, t) - p_i \Psi_i(x, t) = p_i \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{K}_i \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m(x, t) \quad (77)$$

On arrive ainsi à une équation différentielle ordinaire. Cette EDO est résolue avec la méthode d'Euler rétrograde :

$$\frac{\Psi_i^t(x) - \Psi_i^{t-\Delta t}(x)}{\Delta t} - p_i \Psi_i^t(x) = p_i \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{K}_i \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m^t(x) \quad (78)$$

$$\Psi_i^t(x)(1 - \Delta t p_i) = \Psi_i^{t-\Delta t}(x) + \Delta t p_i \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{K}_i \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m^t(x) \quad (79)$$

$$\Psi_i^t(x) = \frac{\Psi_i^{t-\Delta t}(x)}{1 - \Delta t p_i} + \frac{\Delta t p_i}{1 - \Delta t p_i} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{K}_i \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m^t(x) \quad (80)$$

$$\Psi_m(x, t) = \sum_{i=1}^{Norder} \frac{\Psi_i^{t-\Delta t}(x)}{1 - \Delta t p_i} + \mathbf{T}_V^{-1} \sum_{i=1}^{Norder} \left( \frac{\Delta t p_i \mathbf{K}_i}{1 - \Delta t p_i} \right) \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m^t(x) \quad (81)$$

Dans (71) et (72) les éléments  $\Psi$  au temps  $t$  doivent être développés car ils contiennent les courants au temps  $t$  qui sont inconnus. Ensuite les courants à  $t$  et à  $t-\tau$  sont regroupés entre eux.

On obtient alors :

$$\mathbf{v}_{R,m}^t - \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau} + \mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{R,m}^t - \mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau} + 0.5l (\boldsymbol{\varphi}_{R,m}^t + \Psi_{S,m}^{t-\tau}) = \mathbf{0} \quad (82)$$

$$\mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau} - \mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{S,m}^t + \mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau} - 0.5l (\boldsymbol{\varphi}_{S,m}^t + \Psi_{R,m}^{t-\tau}) = \mathbf{0} \quad (83)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_w - 0.5l \mathbf{R}_m \quad (84)$$

$$\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z}_w + 0.5l \mathbf{R}_m + 0.5l\Delta t \mathbf{T}_V^{-1} \sum_{i=1}^{NorderZ} \left( \frac{p_{Z,i} \mathbf{K}_{Z,i}}{1 - \Delta t p_{Z,i}} \right) \mathbf{T}_I \quad (85)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{R,m}^t = \sum_{i=1}^{NorderZ} \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{R,i}^{t-\Delta t}}{1 - \Delta t p_{Z,i}} \right) \quad (86)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_{S,m}^t = \sum_{i=1}^{NorderZ} \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{S,i}^{t-\Delta t}}{1 - \Delta t p_{Z,i}} \right) \quad (87)$$

Les courants et tensions à t sont isolés du reste des paramètres et des tensions historiques sont définies à chaque extrémité de la ligne :

$$\mathbf{v}_{R,m}^t + \mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{R,m}^t = \mathbf{v}_{H,m}^S \quad (88)$$

$$\mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{S,m}^t = \mathbf{v}_{H,m}^R \quad (89)$$

avec

$$\mathbf{v}_{H,m}^S = \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau} + \mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau} - 0.5l (\boldsymbol{\varphi}_{R,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{S,m}^{t-\tau}) \quad (90)$$

$$\mathbf{v}_{H,m}^R = \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau} - \mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau} + 0.5l (\boldsymbol{\varphi}_{S,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{R,m}^{t-\tau}) \quad (91)$$

Le système est maintenant reconverti dans le domaine des phases.

Pour l'extrémité réceptrice (88):

$$\mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{v}_R^t + \mathbf{Z}_K \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{i}_R^t = \mathbf{v}_{H,m}^S \quad (92)$$

$$\mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{v}_R^t + \mathbf{i}_R^t = \mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{v}_{H,m}^S \quad (93)$$

$$\mathbf{Y}_{phase}^K \mathbf{v}_R^t + \mathbf{i}_R^t = -\mathbf{i}_H^S$$

avec

$$\mathbf{i}_H^S = -\mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{v}_{H,m}^S \quad (94)$$

$$\mathbf{Y}_{phase}^K = \mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{T}_V^{-1} \quad (95)$$

Pour l'extrémité émettrice (89) :

$$\mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{v}_S^t - \mathbf{Z}_K \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{i}_S^t = \mathbf{v}_{H,m}^R \quad (96)$$

$$\mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{v}_S^t - \mathbf{i}_S^t = \mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{v}_{H,m}^R \quad (97)$$

$$\mathbf{Y}_{phase}^K \mathbf{v}_S^t - \mathbf{i}_S^t = -\mathbf{i}_H^R$$

avec

$$\mathbf{i}_H^R = -\mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{v}_{H,m}^R \quad (98)$$

Le système s'écrit alors :

$$\mathbf{i}_S^t = \mathbf{Y}_{phase}^K \mathbf{v}_S^t + \mathbf{i}_H^R \quad (99)$$

$$\mathbf{i}_R^t = -\mathbf{Y}_{phase}^K \mathbf{v}_R^t - \mathbf{i}_H^S \quad (100)$$

Ce qui peut être représenté par le modèle de Norton suivant :

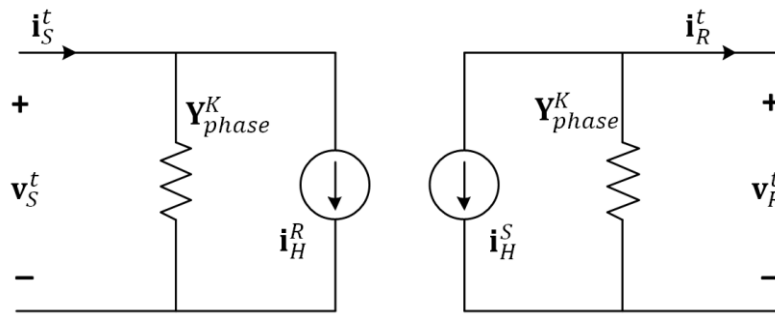


Figure 1-3: Modèle de Norton d'un système de transmission

Ce modèle de Norton est le même que celui utilisé par le modèle universel de ligne.

La matrice  $\mathbf{Y}_{phase}^K$  est calculée une fois avant la simulation temporelle. Les courants  $\mathbf{i}_H^S$  et  $\mathbf{i}_H^R$  et par conséquent les deux produits de convolutions sont calculés à chaque point de temps. Ainsi un modèle temporel de système de transmission (ligne ou câble) est défini.

## 1.4 Exemples abordés dans ce rapport

Deux types d'exemples sont abordés dans ce rapport : les lignes aériennes et les câbles souterrains. Ces exemples sont décrits dans ce chapitre car des exemples numériques sont déjà présentés dans le chapitre suivant.

Tout d'abord, voici un cas de ligne, sa configuration est la suivante :

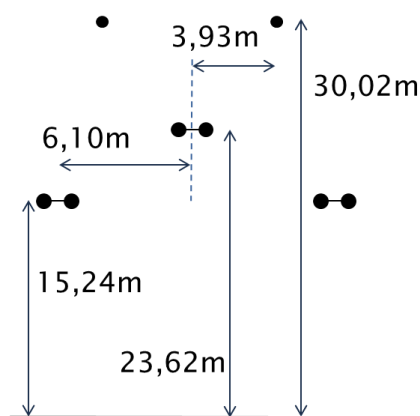


Figure 1-4: Configuration de la ligne aérienne

Elle est la seule configuration de ligne utilisée dans ce rapport. Et voici les autres données la concernant:

Tableau 1.1: Données sur le cas de ligne

Longueur	300 km
Résistivité du sol	100 $\Omega\text{m}$
Diamètre des conducteurs	4.07 cm
Diamètre des fils de garde	0.98 cm
Effet de peau (épaisseur/diamètre)	0.363

Le circuit suivant est principalement utilisé pour les simulations temporelles. Il s'agit d'un circuit simple qui permet de tester la méthode numérique et non d'un cas pratique.

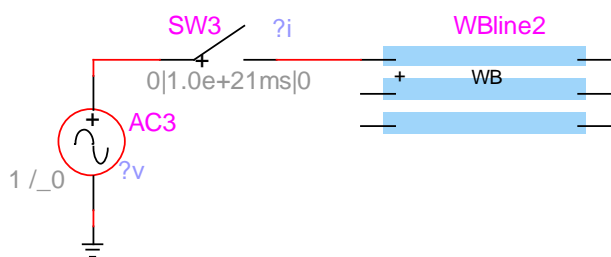


Figure 1-5: Circuit électrique utilisé pour les simulations de la ligne

Une phase est alimentée et toutes les autres extrémités sont en circuit ouvert. L'interrupteur est fermé au moment où la tension est à son maximum. Ceci peut par exemple représenter un défaut sur un disjoncteur d'une phase.

Pour les câbles souterrains, différents exemples ont été testés mais un cas a été particulièrement utilisé. Il est noté câble1.

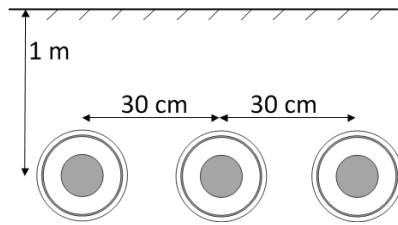


Figure 1-6: Disposition des câbles1

Et voici les autres données concernant les diamètres et les propriétés électriques des conducteurs et isolants :

Tableau 1.2: Données sur le cas du câbles1

Rayon interne de l'âme	0
Rayon externe de l'âme	19.5 mm
Rayon interne de l'écran	37.75 mm
Rayon externe de l'écran	37.97 mm
Rayon extérieur de l'isolation	42.5 mm
Résistivité de l'écran	$1.718 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$
Résistivité de l'âme	$3.365 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$
Perméabilité relative	1
Perméabilité relative de l'isolation	1
Permittivité relative de l'isolation de l'âme	2.85
Permittivité relative de l'isolation de l'écran	2.51
Facteur de perte de l'isolation	0.001

Voici aussi le circuit électrique qui a été principalement utilisé pour ce cas de câble :

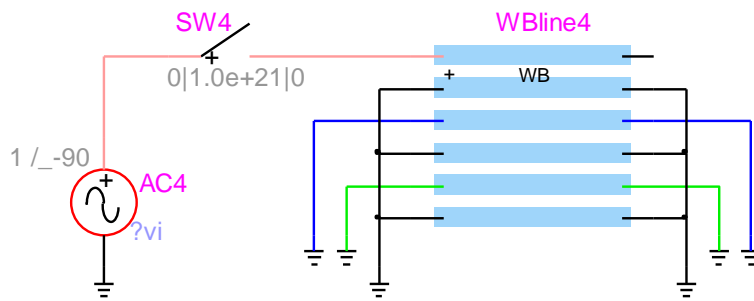


Figure 1-7: Circuit électrique utilisé pour les simulations du câble1

A nouveau, une seule phase est alimentée. Son autre extrémité est en circuit ouvert, et toutes les autres extrémités sont directement mises à la terre. Dans ce cas, l'interrupteur est fermé lorsque la tension croissante passe par zéro.

Comme les écrans sont toujours mis à la terre, il a été plus facile d'implémenter les autres phases à la terre aussi, plutôt qu'une alternance : mise à la terre et circuit ouvert. A nouveau il s'agit de tester numériquement la méthode.



## CHAPITRE 2 MÉTHODES DE LISSAGE

Les matrices d'impédance série et d'admittance shunt sont connues pour un certain nombre d'échantillons de fréquence. Le but de cette partie est d'obtenir une fonction continue qui donne l'impédance série en fonction de la fréquence.

Ces matrices sont obtenues avec le logiciel EMTP-RV [2]. Ce logiciel les calcule à partir de la configuration spatiale et des propriétés électriques des différents composants de la ligne ou du câble. La liste complète de ces paramètres est donnée dans la section précédente.

Les échantillons de fréquence sont choisis logarithmiquement sur une plage de fréquence. Le logiciel demande la fréquence de départ, le nombre de décade à utiliser ainsi que le nombre d'échantillon par décade. Une très basse fréquence est aussi demandée comme échantillon « continu » pour les câbles. Pour les lignes, cet échantillon est automatiquement pris à 1 fHz (1e-15 Hz). Après cette étape, on obtient une matrice d'impédance série  $\mathbf{Z}$  et une matrice d'admittance shunt  $\mathbf{Y}$  pour chacun des échantillons de fréquence. Pour la suite, Nw définit le nombre total d'échantillon de fréquence (l'échantillon « continu » n'est pas inclus dans Nw).

Dans une première sous-partie, la méthode d'interpolation ou lissage est décrite. Elle est appliquée aux éléments de la matrice  $\mathbf{Z}$ . Ensuite le lissage utilisé pour la matrice  $\mathbf{Y}$  est décrit. A partir de ces deux parties, les valeurs des vitesses modales sont étudiées. Une tentative d'amélioration avec le lissage pondéré est testée, puis une autre en mettant des critères sur les pôles obtenus après les repositionnements. Une autre méthode testée consiste à modifier la manière de définir les matrices de transformation modale.

## 2.1 Lissage de l'impédance série $\mathbf{Z}$

L'objectif de cette partie est de calculer les pôles et les résidus qui serviront à approximer la matrice d'impédance série. Ci-dessous un rappel de la forme qui va être utilisée pour le lissage :

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{R}_{DC} + s \left( \mathbf{D} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{K}_i}{s - p_i} \right) \quad (4)$$

La matrice  $\mathbf{R}_{DC}$  correspond à la résistance interne des conducteurs (par unité de longueur), elle est une matrice diagonale. Elle est obtenue à partir de l'échantillon basse fréquence décrit précédemment.

*En pratique l'échantillon basse fréquence a une partie imaginaire, mais est négligeable comparé à la partie réelle. Seule la partie réelle est alors prise.*

Afin de calculer les résidus  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{K}_i$ , l'équation (4) est mise sous la forme suivante :

$$\frac{1}{s} (\mathbf{Z}(s) - \mathbf{R}_{DC}) = \mathbf{D} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{K}_i}{s - p_i} \quad (101)$$

où le membre de gauche est la matrice connue pour les différents échantillons de fréquence, et le membre de droite la fonction lissée dont les paramètres sont inconnus.

Dans un premier temps, il faut déterminer les pôles qui seront utilisés pour le lissage. La difficulté provient du fait que ces pôles serviront à lisser tous les éléments de la matrice d'impédance et non pas seulement un élément. Afin d'optimiser la valeur de ces pôles, le repositionnement de pôles est utilisé. Ce repositionnement est réalisé jusqu'à ce que celui-ci n'entraîne qu'une faible variation de la valeur de chaque pôle. Un seuil d'arrêt est fixé à un certain pourcentage de la valeur de chacun des pôles.

La méthode appliquée est le lissage vectoriel (vector fitting method [16]). Elle est appliquée pour une fonction scalaire : soit  $f(s)$  la fonction à lisser. Comme il a été précisé précédemment, il faut trouver des pôles qui vont permettre de lisser tous les éléments de la matrice étudiée. Pour avoir une fonction scalaire, la trace de la matrice étudiée sera utilisée [17]. Ceci car la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres.

$$f(s_k) = Tr \left[ \frac{1}{s_k} (\mathbf{Z}(s_k) - \mathbf{R}_{DC}) \right] \quad (102)$$

Cette fonction est approximé par une fraction rationnelle de la forme suivante :

$$f(s) \cong \frac{N(s)}{D(s)} \quad (103)$$

où l'ordre du dénominateur est supérieur à celui du numérateur.

$f(s)$  n'est connu que pour des valeurs discrètes de fréquence. L'identification de  $N(s)$  et  $D(s)$  peut se traduire par la résolution du problème suivant :

$$\min \sum_{k=1}^{Nw} \left[ f(s_k) - \frac{N(s_k)}{D(s_k)} \right]^2 = \min \sum_{k=1}^{Nw} \frac{1}{[D(s_k)]^2} [f(s_k)D(s_k) - N(s_k)]^2 \quad (104)$$

où  $Nw$  est le nombre d'échantillons de fréquence.

On définit ensuite la fonction  $\sigma(s)$  qui est aussi une fraction rationnelle :

$$\sigma(s) = \sum_{l=1}^{Norder} \frac{\tilde{c}_l}{s - p_l} + 1 \quad (105)$$

et qui vérifie la relation suivante:

$$(\sigma f)_{fit}(s) = f(s)\sigma_{fit}(s) \quad (106)$$

Comme  $\sigma(s)$  est déjà une fraction rationnelle, elle est égale à  $\sigma_{fit}(s)$ .

$$\left( \sum_{l=1}^{Norder} \frac{c_l}{s - p_l} \right) = f(s) \left( 1 + \sum_{l=1}^{Norder} \frac{\tilde{c}_l}{s - p_l} \right) \quad (107)$$

$$\left( \sum_{l=1}^{Norder} \frac{c_l}{s - p_l} \right) - f(s) \left( \sum_{l=1}^{Norder} \frac{\tilde{c}_l}{s - p_l} \right) = f(s) \quad (108)$$

Le terme *Norder* correspond à l'ordre du lissage qui est égal au nombre de pôle.

Développée sous forme de produit, les éléments de l'équation (106) deviennent :

$$(\sigma f)_{fit}(s) = \frac{\prod_{l=1}^{Norder} (s - z_l)}{\prod_{l=1}^{Norder} (s - p_l)} \quad (109)$$

$$\sigma_{fit}(s) = \frac{\prod_{l=1}^{Norder} (s - \tilde{z}_l)}{\prod_{l=1}^{Norder} (s - p_l)} \quad (110)$$

En isolant la fonction à lisser toujours dans (106) on obtient :

$$f(s) = \frac{(\sigma f)_{fit}(s)}{\sigma_{fit}(s)} = \frac{\prod_{l=1}^{Norder} (s - z_l)}{\prod_{l=1}^{Norder} (s - \tilde{z}_l)} \quad (111)$$

On remarque alors que les zéros de  $\sigma_{fit}(s)$  sont égaux aux pôles de  $f(s)$ . Par conséquent, à partir des résidus de  $\sigma_{fit}(s)$  on peut déterminer les pôles de  $f(s)$ .

$$\sigma(s) = \sum_{l=1}^{Norder} \frac{\tilde{c}_l}{s - p_l} + 1 = \frac{\prod_{l=1}^{Norder} (s - \tilde{z}_l)}{\prod_{l=1}^{Norder} (s - p_l)} \quad (112)$$

A partir de l'équation (108), un système d'équations peut être formé pour calculer les résidus  $c_l$  et  $\tilde{c}_l$ . Ce système est défini sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (113)$$

Les lignes de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont définies de la manière suivante :

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_k - p_1} & \dots & \frac{1}{s_k - p_{Norder}} & \frac{-f(s_k)}{s_k - p_1} & \dots & \frac{-f(s_k)}{s_k - p_{Norder}} \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$b_k = f(s_k) \quad (115)$$

Le vecteur des inconnues  $\mathbf{x}$  est donc :

$$\mathbf{x} = [c_1 \dots c_{Norder} \tilde{c}_1 \dots \tilde{c}_{Norder}]^T \quad (116)$$

*En pratique le système est résolu en séparant les parties réelles et parties imaginaires.*

Il faut noter que des pôles initiaux doivent être utilisés avant de pouvoir calculer de nouveaux pôles. Les premiers pôles sont alors placés logarithmiquement sur la plage de pulsation étudiée :

Le premier pôle est pris à  $\omega_1 : p_1 = -\omega_1$

Les autres pôles sont calculés comme suit :

$$\alpha = \frac{\log(\omega_1) - \log(\omega_{Nw})}{Norder - 1} \quad (117)$$

$$p_k = -10^{\log(\omega_1) + \alpha(k-1)} = -\omega_1 * 10^{\alpha(k-1)} \quad (118)$$

pour k allant de 2 à  $Norder$ .

Une fois les résidus  $\tilde{c}_l$  calculés, les zéros de  $\sigma(s)$  peuvent être calculés. Trouver ces zéros revient à calculer les racines de l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^{Norder} \left( \tilde{c}_i \prod_{l=1, l \neq i}^{Norder} (s - p_l) \right) + \prod_{l=1}^{Norder} (s - p_l) = 0 \quad (119)$$

Résoudre cette équation est équivalent à déterminer les valeurs propres de la matrice suivante :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & p_{Norder} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} * [\tilde{c}_1 \quad \dots \quad \tilde{c}_{Norder}] \quad (120)$$

Les zéros de  $\sigma(s)$  étant obtenus, on a les nouveaux pôles.

Dans un premier temps, la méthode de repositionnement des pôles a été réalisée une seule fois. Comme de nombreux problèmes de stabilité étaient présents, l'affinage des pôles a vite été une piste envisagée pour améliorer ce paramètre. D'abord un nombre fixe de repositionnement a été utilisé (entre 5 et 20). Enfin, comme un nombre fixe n'est pas vraiment un gage de performance, un critère d'arrêt a été mis en place.

La variation de valeur de chacun des pôles à chaque repositionnement a été prise comme critère d'arrêt. Le calcul des résidus ne se fait qu'après le choix définitif des pôles. Il en est donc de même pour l'impédance lissée et l'erreur de lissage. Le critère d'arrêt pour le repositionnement  $i+1$  est :

$$\frac{|p_l^{i+1} - p_l^i|}{|p_l^i|} \leq \text{seuil} \quad (121)$$

Pour tout  $l$  allant de 1 au nombre total de pôle.

Le seuil a d'abord été placé à 1% puis réduit plusieurs fois d'un facteur 10. Pour un seuil trop petit, le critère peut ne jamais être atteint pour certains pôles, sachant que le nombre maximal de repositionnement a été fixé à 3000. On a par exemple, pour le cas de la ligne et un seuil de  $10^{-5}$ , le nombre d'itération pour avoir la convergence peut varier de quelques une à quelques centaines (autour des 500 pour un grand nombre de pôle). Pour le cas de la ligne, un seuil à  $10^{-6}$  est aussi acceptable, mais pour avoir une valeur adéquate pour tous les cas (y compris les câbles) la valeur a été gardée à  $10^{-5}$ .

Ci-dessous quelques exemples de l'évolution de la valeur d'un pôle lors des différents repositionnements.

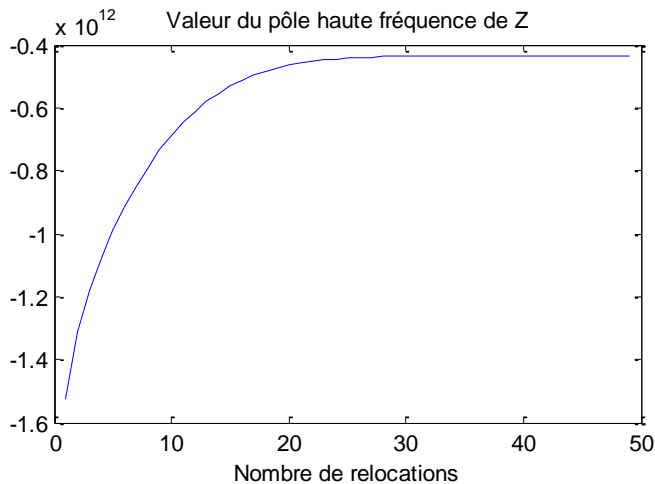


Figure 2-1: Evolution de la valeur d'un pôle en fonction du repositionnement (ligne, 20 pôles)

Pour la ligne, les échantillons de fréquence se répartissent de 0.1 Hz à 10 MHz avec 10 échantillons par décade.

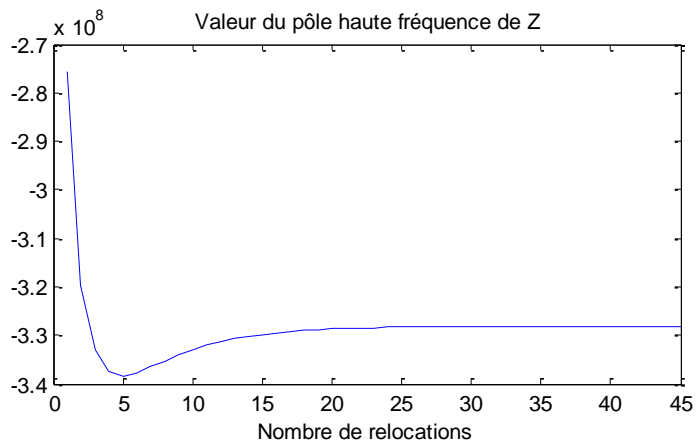


Figure 2-2: Evolution de la valeur d'un pôle en fonction du repositionnement (câble1a, 30 pôles)

Le nombre de pôles indiqué correspond au nombre total de pôles utilisé pour le lissage. Pour ce premier exemple du câble1, les échantillons sont pris de 0.01 Hz à 1 MHz avec 10 échantillons par décade. D'autres structures d'échantillonnage sont utilisées pour les câbles (voir section 2.2), c'est pourquoi l'indice « a » est utilisé.

Maintenant que les pôles sont fixés, il ne reste plus qu'à calculer les résidus. Ce calcul se fait en se ramenant à un système de la forme  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Comme il faut calculer les résidus pour chaque

élément de  $\mathbf{Z}(s)$ , il y a donc  $n \times n$  systèmes à résoudre. La matrice  $\mathbf{A}$  est identique dans chaque cas, mais les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{b}$  sont différents pour chaque élément  $(i,j)$  de  $\mathbf{Z}(s)$ .

Les lignes de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont définies de la manière suivante :

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_k - p_1} & \dots & \frac{1}{s_k - p_{Norder}} & 1 \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$b_{i,j,k} = Z_{i,j}(s_k) \quad (123)$$

Le vecteur des inconnues  $\mathbf{x}$  est donc :

$$\mathbf{x}_{i,j} = [K_{i,j,1} \dots K_{i,j,Norder} \ D_{i,j}]^T \quad (124)$$

Les résidus étant calculés, tous les paramètres du lissage de  $\mathbf{Z}$  ont été déterminés :

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{R}_{DC} + s \left( \mathbf{D} + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{K}_i}{s - p_i} \right) \quad (4)$$

La matrice  $\mathbf{K}$  qui contient tous les résidus est alors de dimension  $n \times n \times Norder$ .

Afin de vérifier la qualité du lissage effectué, les deux membres de l'équation précédente sont comparés entre eux. Comme une différence importante existe entre les cas de lignes aériennes et de câbles souterrains, la suite de l'analyse du lissage est séparée en deux parties. Dans un premier temps les lignes sont étudiées puis les câbles.



### 2.1.1 Lissage de $Z$ : cas de la ligne aérienne

Afin de vérifier la qualité du lissage effectué, les deux membres de l'équation précédente sont comparés entre eux. Comme il s'agit de nombres complexes, le module et l'angle sont comparés.

Ci-dessous un exemple de comparaison :

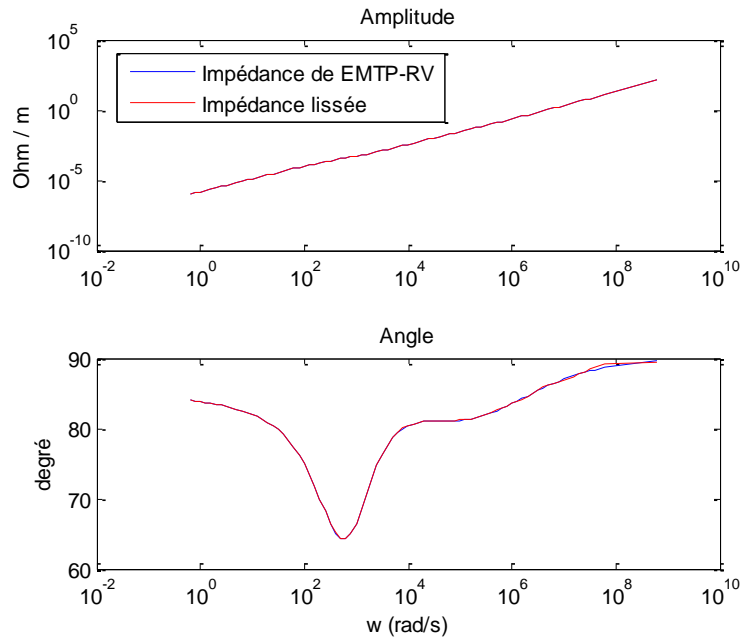


Figure 2-3: Lissage pour le cas de ligne, 15 pôles, élément (2,1)

On peut constater que dans ce cas que la fonction lissée est très proche de la fonction originale. Pour quantifier la précision du lissage, les erreurs relative et absolue entre ces deux courbes sont calculées. Comme l'erreur peut aussi être un nombre complexe, le module de cette erreur est pris en compte. Sur la Figure 2-4 l'erreur maximale du lissage de tous les éléments pour tous les échantillons de fréquence est présentée en fonction du nombre de pôle utilisé. A cela s'ajoute la courbe qui donne la valeur absolue (en Ohm/m) de cette erreur relative maximale. L'erreur absolue peut être plus grande, mais étant plus faible relativement à la valeur de l'impédance, elle n'est pas détaillée ici.

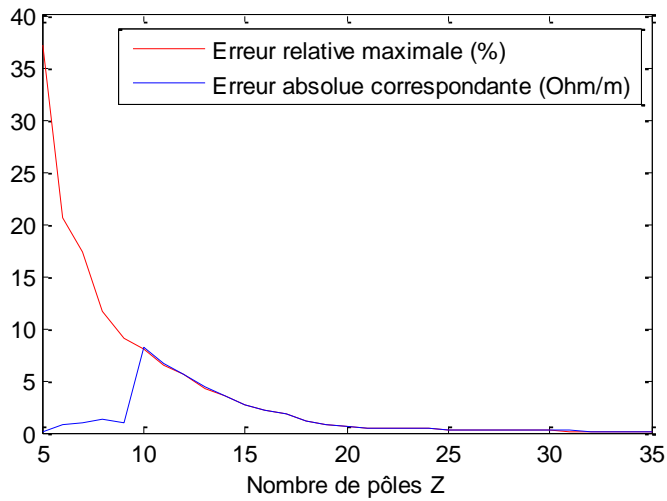


Figure 2-4: Erreur de lissage (cas de ligne) en fonction du nombre de pôle

Comme on pouvait s'y attendre l'erreur maximale diminue lorsque le nombre de pôles augmente. Néanmoins il faut garder à l'esprit qu'augmenter le nombre de pôles va aussi augmenter le temps de calcul pendant la simulation temporelle. La forte variation de l'erreur absolue maximale a lieu lorsque cette erreur est atteinte sur le dernier échantillon de fréquence. A partir de 10 pôles, l'erreur absolue maximale est atteinte sur le dernier échantillon de fréquence alors que pour un nombre de pôle plus faible cette erreur est atteinte pour d'autres échantillons. L'erreur maximale est toujours atteinte sur les deux mêmes éléments de la matrice : (3,1) et (1,3).

### 2.1.2 Lissage de $Z$ : cas des câbles souterrains

Le cas de ligne étant analysé, on repasse aux câbles et aux courbes de comparaison entre l'impédance donnée par EMTP-RV et la fonction lissée :

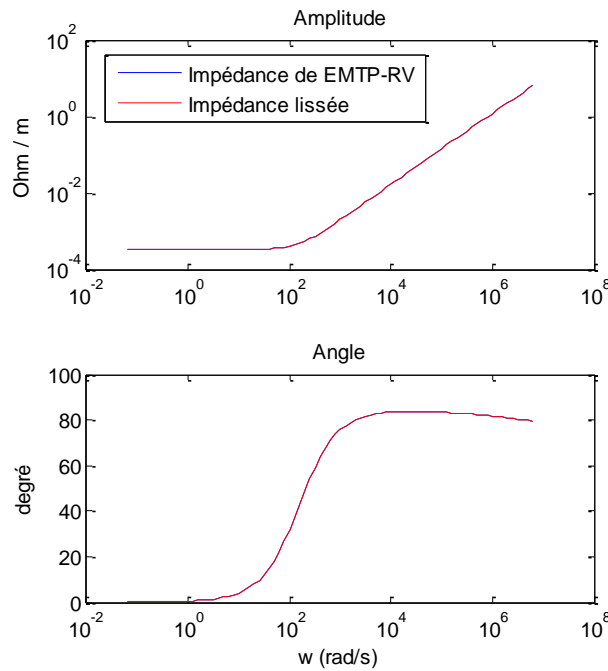


Figure 2-5: Lissage de Câble1a, 20 pôles, élément (2,2)

Comme dans le cas de la ligne (Figure 2-3), on peut constater que dans ce cas que la fonction lissée est très proche de la fonction originale.

La quantification de la précision se fait de la même manière que précédemment. Les erreurs relative et absolue entre ces deux courbes sont calculées.

Sur la Figure 2-6 l'erreur maximale du lissage de tous les éléments pour tous les échantillons de fréquence est présentée en fonction du nombre de pôle utilisé. A cela s'ajoute la courbe qui donne la valeur absolue (en Ohm/m) de cette erreur relative maximale.

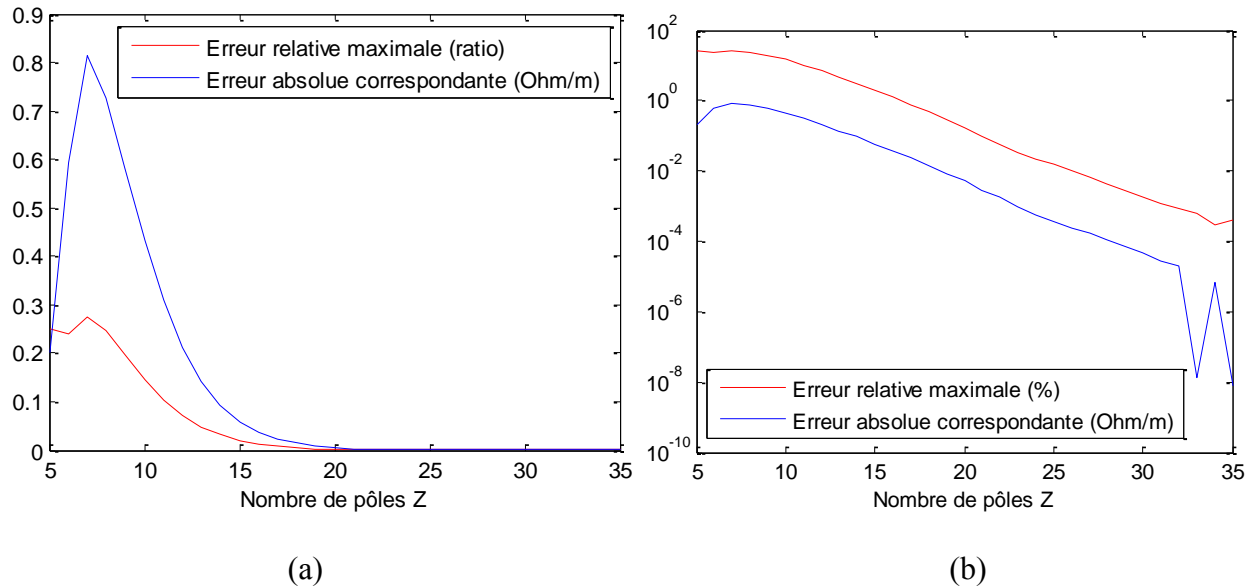


Figure 2-6: Erreur de lissage (câble1a) en fonction du nombre de pôles : échelle linéaire (a) et logarithmique (b)

Mis à part le premier point (à 5 pôles) et les deux creux à 33 et 35 pôles (l'échelle logarithmique de la Figure 2-6), l'erreur relative maximale est atteinte sur les deux derniers échantillons de fréquence. Ces deux creux s'expliquent par le fait que la fréquence est plus faible et donc que la valeur (en Ohm/m) de  $Z$  est aussi plus faible. Comme pour le cas de la ligne, l'erreur relative maximale est toujours atteinte pour les mêmes éléments (8 fois): deux blocs  $2 \times 2$  dans le coin inférieur gauche et le coin supérieur droit.

On constate que l'erreur absolue en Ohm/m est plus faible pour ce cas de câble. En effet l'erreur atteint  $0.8 \text{ } \Omega/\text{m}$  dans ce cas alors qu'elle est proche de  $8 \text{ } \Omega/\text{m}$  pour la ligne.

## 2.2 Lissage de l'admittance shunt $\mathbf{Y}$

Dans un premier temps, comme on disposait du balayage fréquentiel de l'admittance shunt, la méthode de lissage appliqué à  $\mathbf{Z}$  a aussi été utilisée pour  $\mathbf{Y}$ . Tous les paramètres sont calculés, mais seul la matrice  $\mathbf{C}$  est gardée. Ces calculs se font avant la simulation temporelle et n'ont aucune influence sur la durée de celle-ci.

Ci-dessous un rappel de la forme qui va être utilisée pour le lissage :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_{DC} + s \left( \mathbf{C} + \sum_{i=1}^{Ny} \frac{\mathbf{K}_{Y,i}}{s - p_{Y,i}} \right) \quad (5)$$

La matrice  $\mathbf{G}_{DC}$  correspond à la conductance entre les conducteurs et la terre (par unité de longueur). Comme pour  $\mathbf{R}_{DC}$ , elle est obtenue à partir de l'échantillon basse fréquence décrit précédemment.

Afin de calculer les résidus  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}_{Y,i}$ , l'équation (5) est mise sous la forme suivante :

$$\frac{1}{s}(\mathbf{Y}(s) - \mathbf{G}_{DC}) = \mathbf{C} + \sum_{i=1}^{Ny} \frac{\mathbf{K}_{Y,i}}{s - p_{Y,i}} \quad (125)$$

où le membre de gauche est la matrice connue pour les différents échantillons de fréquence, et le membre de droite la fonction lissée dont les paramètres sont inconnus.

L'équation (102) est reprise et appliquée à l'admittance shunt:

$$f(s_k) = Tr \left[ \frac{1}{s_k} (\mathbf{Y}(s_k) - \mathbf{G}_{DC}) \right] \quad (126)$$

Le reste du raisonnement est identique à celui appliqué à la matrice d'impédance série  $\mathbf{Z}$ .

En analysant les valeurs de  $\mathbf{Y}(s)/s$ , une grande différence entre le résidu  $\mathbf{C}$  calculé précédemment et la valeur de  $\mathbf{Y}(s)/s$  à haute fréquence a été constatée. La méthode standard pour le calcul de  $\mathbf{C}$  n'est donc pas viable. Ci-dessous un exemple de différence pour la ligne :

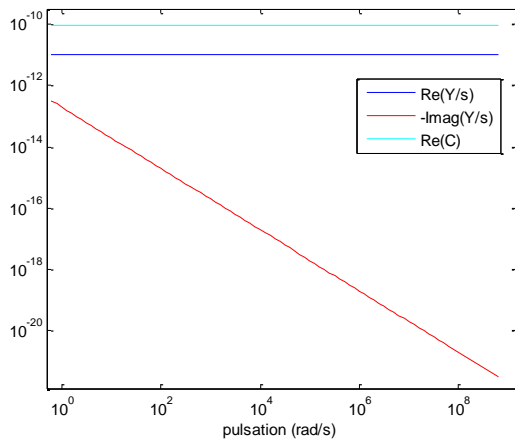


Figure 2-7: Comparaison  $\mathbf{Y}/s$  et  $\mathbf{C}$ , élément (1,1) (ligne)

Pour pouvoir comparer la valeur des partie réelle et imaginaire sur un même graphique les deux doivent être du même signe. Comme la partie imaginaire est négative, son opposé a été pris.

Le  $\mathbf{C}$  calculé ne possède pas de partie imaginaire. On voit sur ce graphique qu'il y a presque une décade (soit un facteur 10) entre le résidu du lissage, et le vrai ratio  $\mathbf{Y}(s)/s$ . La valeur de  $\mathbf{C}$  est fixe mais une ligne a été tracé pour pouvoir comparer plus facilement avec la courbe de  $\mathbf{Y}(s)/s$ .

Par conséquent, une autre méthode a été implémentée pour le calcul de  $\mathbf{C}$ . Elle consiste à faire un lissage de chaque élément de  $\mathbf{Y}$  séparément. C'est-à-dire que chaque élément est lissé indépendamment avec ses propres pôles. Pour le cas de ligne, cette méthode donne des résultats identique aux valeurs haute-fréquence de  $\mathbf{Y}(s)/s$ , même pour de faible nombre de pôle.

On peut aussi prendre la partie réelle du ratio  $\mathbf{Y}(s)/s$  du dernier échantillon de fréquence, ce qui permet d'arriver aux même valeurs pour la matrice  $\mathbf{C}$ . Ce moyen est alors le plus rapide pour obtenir la matrice  $\mathbf{C}$ .

Pour les câbles, les résultats sont meilleurs mais d'autres paramètres doivent être pris en compte. Plus de détails sont donnés dans les paragraphes qui suivent.

### **Lissage de $\mathbf{Y}$ pour les câbles :**

Contrairement au cas de ligne, le lissage par élément de  $\mathbf{Y}(s)$  ne donne pas de résultat très satisfaisant. La différence relative dépasse les 15% et peut atteindre plus de 50% selon le nombre

de pôle utilisé. Les données venant de EMTP-RV ont alors été modifiées pour donner plus d'information. Les données originales sont : échantillonnage logarithmiquement distribué de 10mHz à 1MHz avec 10 points par décade. La distribution est toujours faite logarithmiquement mais les bornes de l'échantillonnage et le nombre d'échantillon sont modifiés.

Voici un récapitulatif des données de EMTP-RV (le cas a étant les données initiales) :

Câble1a: de 0.01 Hz à 1 MHz, 10 points/décade

Câble1b: de 0.01 Hz à 10 GHz, 20 points/décade

Câble1c: de 0.001 Hz à 10 MHz, 20 points/décade

Pour les cas b et c, la différence relative chute à 0.1% même pour un faible nombre de pôle (<10), ce qui est bien mieux que pour le cas a. Le nombre d'échantillons par décade est donc un point essentiel.

Comme pour le cas de la ligne, les valeurs de  $\mathbf{Y}(s)/s$  en fonction de la fréquence pour le câble1a sont affichées ci-dessous :

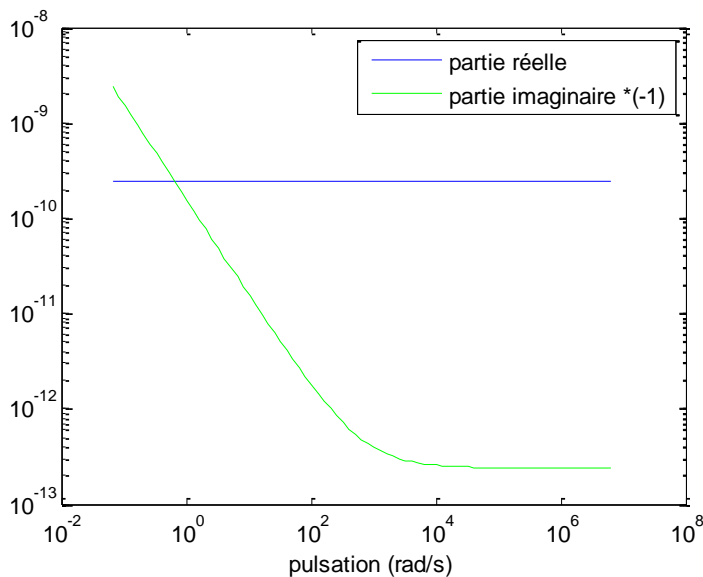


Figure 2-8: Valeur de  $\mathbf{Y}/s$  (élément (1,1)) en fonction de la fréquence (câble1)

Pour pouvoir comparer la valeur des partie réelle et imaginaire sur un même graphique les deux doivent être du même signe. Comme la partie imaginaire est négative, son opposé a été pris pour l'élément (1,1).

En analysant les autres éléments de la matrice, on constate qu'il existe des liens. La matrice  $\mathbf{Y}(s)/s$  est diagonale par bloc, et est composé de trois blocs 2\*2 identiques. Ce qui est normal étant donné que les trois câbles sont identiques.

La matrice  $\mathbf{Y}(s)/s$  est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} a - jb(s) & -a + jb(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a + jb(s) & c - jd(s) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a - jb(s) & -a + jb(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a + jb(s) & c - jd(s) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a - jb(s) & -a + jb(s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a + jb(s) & c - jd(s) \end{bmatrix} \quad (127)$$

avec

$$c - jd(s) = k (a - jb(s)) \quad k \approx 6.1617239887 \quad (128)$$

On voit aussi sur la Figure 2-8 que la partie imaginaire se stabilise à partir d'une certaine fréquence. Dans ce cas, comme les valeurs haute-fréquence sont constantes, une autre solution pour obtenir la matrice  $\mathbf{C}$  est de prendre un des échantillons haute-fréquence de  $\mathbf{Y}(s)/s$ .

Il existe cependant une différence entre le lissage par élément de  $\mathbf{Y}$  et la prise d'un échantillon haute fréquence divisé par  $s$ . Avec le lissage, la matrice  $\mathbf{C}$  est purement réelle.

Pour les hautes fréquences, on a:  $\frac{a}{1000} \cong b$  ce qui montre que la partie imaginaire est négligeable. Il faut cependant que  $\mathbf{C}$  soit réel car des éléments imaginaires entraîneraient des valeurs complexes pour les vitesses modales, ce qui n'a aucun sens physique. Pour ce cas, comme pour les lignes, il est donc plus rapide de prendre la partie réelle du dernier échantillon de  $\mathbf{Y}(s)/s$ , plutôt que de réaliser un lissage de chaque élément de  $\mathbf{Y}$ . D'autres cas de câbles ont été testé et on voit que les courbes de  $\mathbf{Y}(s)/s$  sont de la même forme. La partie réelle est constante et la partie imaginaire est aussi constante pour les hautes fréquences.



## 2.3 Calcul des vitesses modales

Un autre paramètre qui n'est pas inhérent au lissage mais qui en est directement dépendant est la vitesse modale. Comme cela a été décrit dans la section 1.1, les vitesses modales dépendent des résidus **C** et **D**.

Sur la figure suivante, les vitesses modales sont calculées pour différentes valeurs du nombre de pôle pour le lissage de **Z**. Comme la matrice **C** est aussi nécessaire pour ces calculs, et en restant en accord avec la partie précédente, la partie réelle du ratio  $\mathbf{Y}(s)/s$  du dernier échantillon de fréquence a été prise pour **C**.

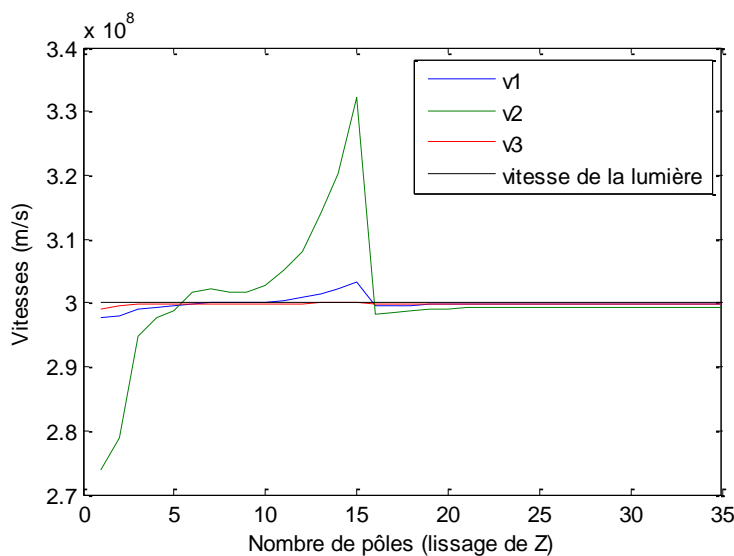


Figure 2-9: Évolution des vitesses modales en fonction du nombre de pôle pour **Z** (ligne)

On voit clairement que sur la Figure 2-9 deux des vitesses modales dépassent la vitesse de 300 000 km/s qui est la vitesse de la lumière dans le vide. Ceci prouve qu'il y a une erreur numérique dans le calcul de ces vitesses. Ce n'est pas clairement visible sur la Figure 2-9 mais à partir de 16 pôles les trois vitesses modales sont inférieures à la vitesse de la lumière.

A partir de 16 pôles, Matlab indique que la matrice **A** (pour le calcul des résidus (122)) est mal conditionnée. Pour y remédier, un processus pour améliorer le conditionnement est appliqué au calcul des résidus (ce processus a été utilisé par défaut pour le calcul des pôles). Matlab ne donne alors plus de message jusqu'à la dernière valeur testée, c'est-à-dire 35.

Ce processus pour améliorer le conditionnement de **A** est le suivant. Chaque élément de la matrice est divisé par la norme euclidienne du vecteur colonne auquel il appartient. Le système

est résolu, puis chaque élément du vecteur  $x$  résultant est aussi divisé par la norme associée calculée précédemment.

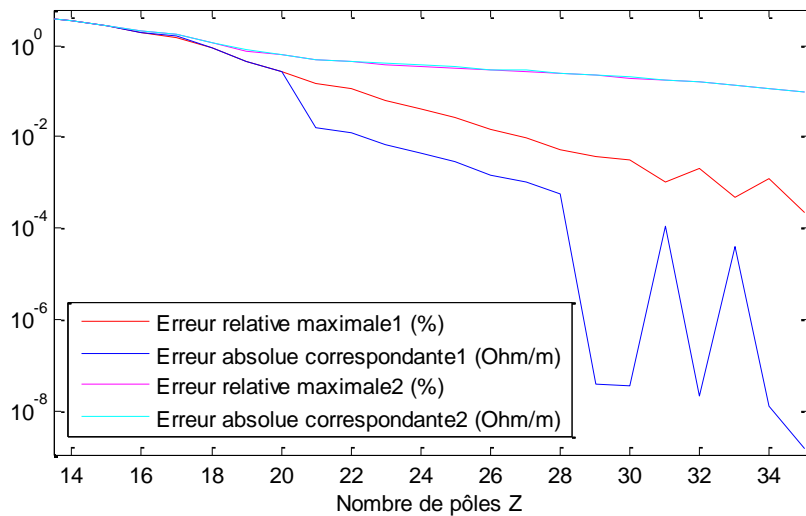


Figure 2-10: Erreur de lissage de  $Z$  (cas de ligne) avec (1) et sans conditionnement (2)

On constate la différence sur l'erreur de lissage à partir de 16 pôles. Avec conditionnement l'erreur est bien plus faible. Comme précédemment, les fortes variations qui apparaissent sont dues au fait que l'erreur maximale n'est pas atteinte sur le même échantillon de fréquence.

Néanmoins l'erreur numérique déjà présente précédemment pour le calcul des vitesses modales est encore plus accentuée :

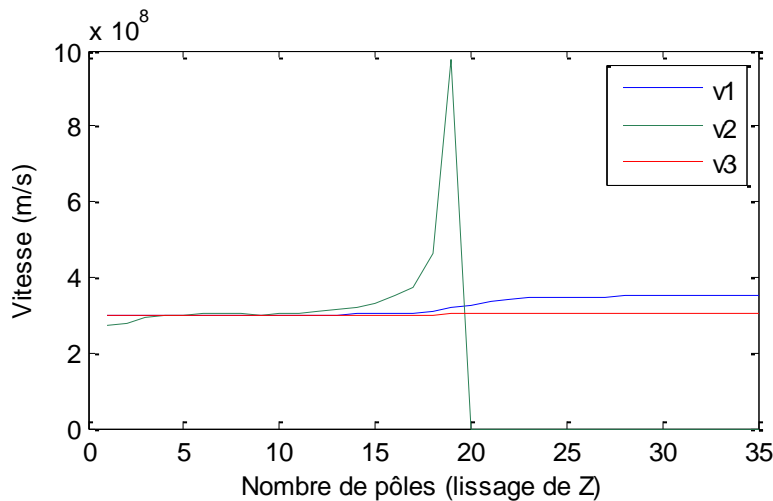


Figure 2-11: Vitesses modales en fonction du nombre de pôle de  $Z$  (ligne) avec conditionnement

Pour  $v_2$  (courbe verte), à partir de 20 pôles la vitesse est un nombre imaginaire pur c'est pourquoi la courbe est à zéro.

Il ressort aussi de ces courbes que la précision du lissage n'est pas un critère suffisant pour la précision et la validité du modèle.

Pour corriger cette erreur, deux modifications dans le lissage et dans le calcul des matrices de transformation sont proposées dans les sections suivantes.

### **Calcul des vitesses modales pour les câbles :**

Les mêmes analyses sont maintenant faites sur un cas de câbles. Le même phénomène de mauvais conditionnement apparaît aussi partir d'un certain nombre de pôle. Il apparaît à partir de 27 pôles et il est retiré grâce au processus décrit précédemment.

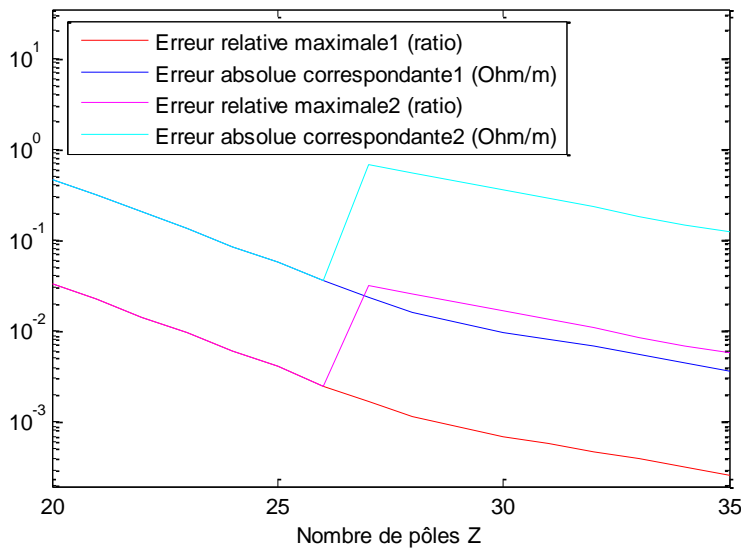


Figure 2-12: Erreur de lissage de  $Z$  (câble1c) avec (1) et sans conditionnement (2)

A nouveau le processus améliore la précision du lissage en évitant le saut qui a lieu normalement à 27 pôles.

Tout d'abord les vitesses modales calculées sans utiliser le processus de conditionnement sont présentées :

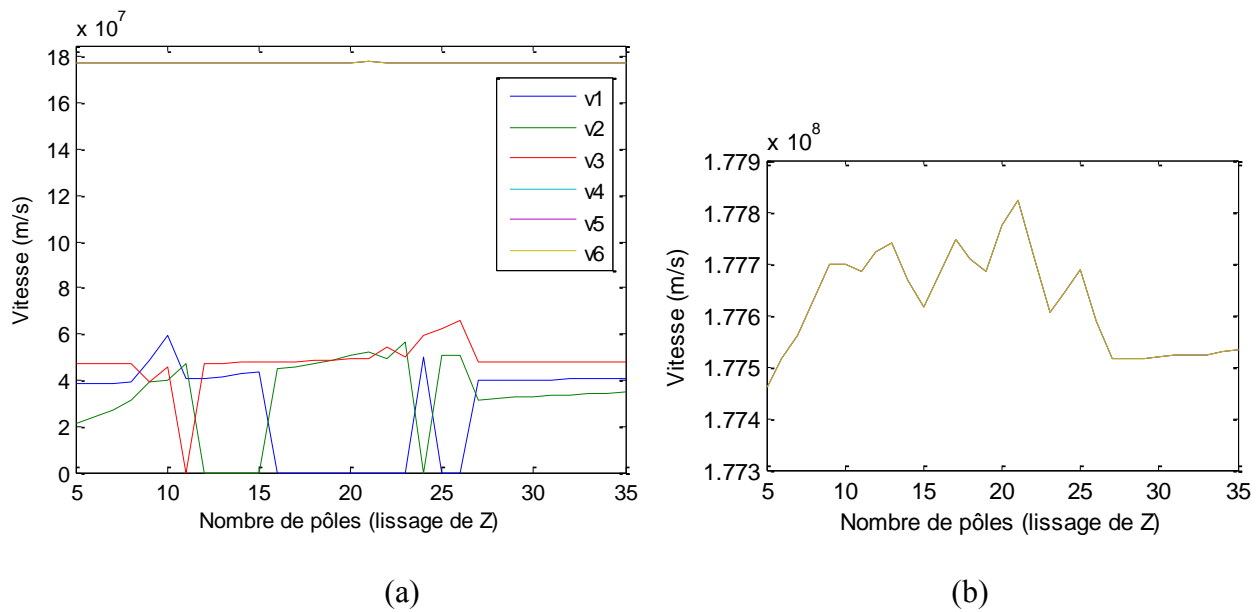


Figure 2-13: Vitesses modales sans conditionnement (câble1c) : toutes (a), et les 4, 5 et 6 seules (b)

On constate que pour certaines valeurs de pôles certaines vitesses modales sont nulles. En réalité elles sont imaginaires pures. Elles sont affichées à zéro car Matlab ne peut pas mettre sur un même graphique des valeurs réelles et complexes. On voit aussi que pour un nombre de pôle compris entre 11 et 26 inclusivement, il y a toujours au moins une vitesse qui est complexe.

Pour les trois modes les plus rapides, les vitesses sont quasiment identiques. La variation entre les différents est faible (0.2 % entre la valeur maximale et minimale).

Le conditionnement est donc aussi appliqué au calcul des résidus :

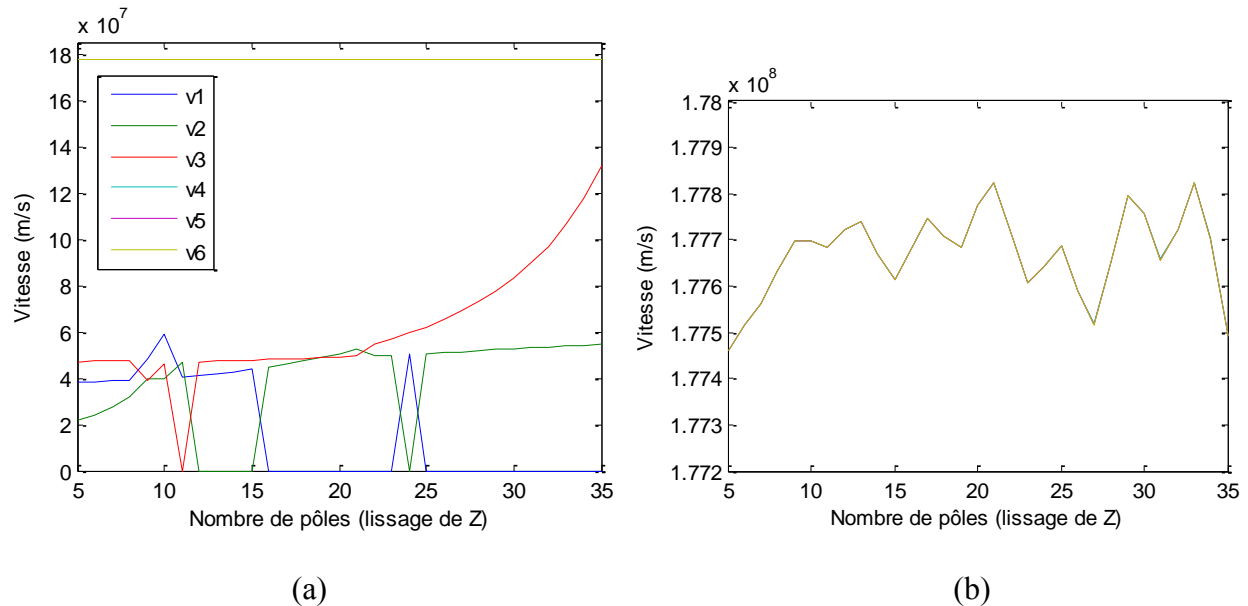


Figure 2-14: Vitesses modales avec conditionnement (câble1c) : toutes (a), et les 4, 5 et 6 seules (b)

Comme il a été montré précédemment le conditionnement améliore la précision du lissage. Mais pour le calcul des vitesses modales, le conditionnement dégrade à nouveau les résultats. Pour tout nombre de pôles au-dessus de 10, il y a toujours une vitesse qui a une valeur complexe. On voit aussi qu'une des vitesses (v3 en rouge) est croissante à partir de 23 pôles et ne tend pas à se stabiliser.

Comme précédemment les trois plus grandes vitesses sont quasiment identiques, et la variation entre les différents cas est similaire au cas précédent.

A titre de comparaison, ci-dessous les vitesses modales calculées pour le cas avec seulement 10 échantillons par décade (câble1a) :

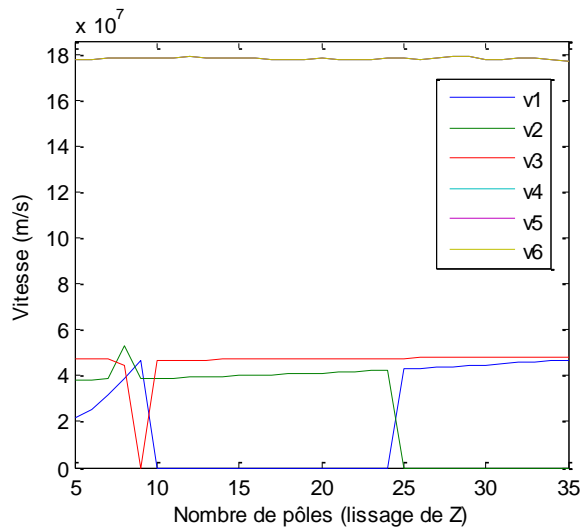


Figure 2-15: Vitesses modales (câble 1a)

Il n'y a aucun problème de conditionnement pour le calcul des résidus avec les données câble 1a. On trouve aussi au moins une vitesse complexe pour un nombre pôle supérieur à 8.

Comme pour le cas de ligne, il est impossible de poursuivre les calculs en présence de vitesses modales complexes. Comme pour le cas de ligne, des variantes dans la méthode de lissage ont été testées. Elles sont présentées dans les prochaines parties.

Le nombre de pôle est arrêté à 35. Il n'y a pas de raison particulière quant à la valeur précise de ce nombre mais plutôt plusieurs raisons qui visent à limiter ce nombre, comme le temps de calcul par exemple.

La première et la plus importante est que plus le nombre de pôle est élevé plus le temps de calcul pour chaque itération est long. Une seconde raison est le nombre limité d'échantillon de fréquence, est-il utile d'avoir autant de pôles que d'échantillons ? Enfin à partir d'un nombre de pôle situé autour des 37 et 38, le repositionnement des pôles donne des pôles complexes conjugués. Ces pôles entraînent aussi l'apparition de vitesses complexes. Dans ces cas, la partie réelle ou le module des pôles est prise et le nombre de pôle est réduit de un par paire de pôles complexes présente. Comme l'augmentation a pour but d'augmenter la précision, le fait de réduire ce nombre ensuite est à contre-sens de l'objectif recherché. Ces cas ont donc été évités.

## 2.4 Repositionnement des pôles avec un lissage pondéré

Une autre méthode de lissage a aussi été testée sur la matrice d'impédance série  $\mathbf{Z}$ . Il s'agit du lissage vectoriel pondéré (weighted vector fitting) [18]. La méthode est d'abord décrite puis la comparaison est faite avec la méthode utilisée précédemment.

On repart de l'équation (104). Pour le lissage standard précédent, l'élément  $[D(s_k)]^2$  qui est au dénominateur a été approximé par 1. Ce qui permet d'arriver à l'équation (107) qui aurait pu s'écrire :

$$N(s_k) = f(s_k)D(s_k) \quad (129)$$

En prenant la valeur absolue au lieu du carré dans (104), et en remplaçant N et D par leur approximation sous forme de fractions rationnelles, on arrive à :

$$\min \left| \frac{1}{1 + \sum_{l=1}^{Norder} \frac{\tilde{c}_l}{s - p_l}} \left[ \sum_{l=1}^{Norder} \frac{c_l}{s - p_l} - \left( 1 + \sum_{l=1}^{Norder} \frac{\tilde{c}_l}{s - p_l} \right) f(s) \right] \right| \quad (130)$$

où le crochet de la partie droite correspond au cas précédent, et la fraction à gauche constitue le facteur de pondération.

En réalité comme les éléments  $\tilde{c}_l$  du facteur de pondération sont inconnus, les résidus  $\tilde{c}_l$  et les pôles  $p_l$  de l'itération précédente sont utilisés pour ce facteur de pondération :

$$C^{(j)}(s) = 1 + \sum_{l=1}^{Norder} \frac{\tilde{c}_l^{(j-1)}}{s - p_l^{(j-1)}} \quad (131)$$

Le système d'équation (113) devient alors:

$$\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}' \quad (132)$$

où  $\mathbf{A}'$  est la matrice utilisée précédemment et où chaque ligne a été divisée par le facteur de pondération de la fréquence correspondante  $C^{(j)}(s_k)$ . La même chose est appliquée au vecteur  $\mathbf{b}$ .

Pour la première itération, le facteur de pondération est pris à 1 (soit la même méthode que le lissage standard). Une fois les paramètres connus avec la première itération, le facteur de pondération peut être appliqué.

Pour comparer avec la méthode précédente, voici deux courbes montrant l'évolution du pôle haute fréquence pour le cas de ligne et le cas du câble1a.

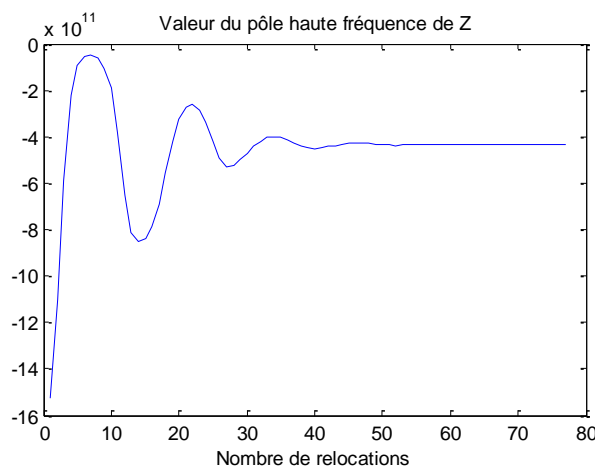


Figure 2-16: Evolution d'un pôle en fonction du repositionnement, 20 pôles (ligne)

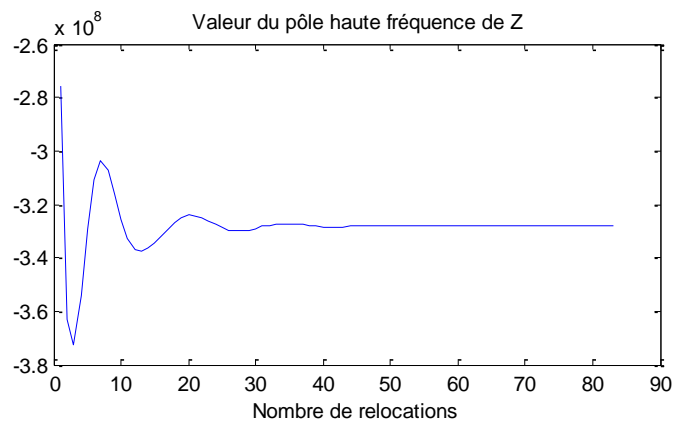


Figure 2-17: Evolution d'un pôle en fonction du repositionnement, 30 pôles (câble1a)



On constate que les valeurs oscillent ce qui n'était pas le cas avant (Figure 2-1 et Figure 2-2). Par ailleurs, le nombre de repositionnement nécessaire a aussi augmenté : 77 au lieu de 49 pour la ligne, et 83 au lieu de 45 pour le câble1a.

Après comparaison avec les différents cas présentés dans la partie précédente, il en ressort que le lissage pondéré n'a pas d'influence sur l'erreur de lissage. Pour le cas de ligne avec et sans conditionnement, les cas câble1a et câble1c avec et sans conditionnement, l'erreur de lissage est identique au cas sans pondération. De même pour les vitesses modales qui sont aussi identiques avec et sans pondération (différence de l'ordre de  $10^{-10}$  de la vitesse). Cette méthode n'apporte donc aucun avantage en plus d'être plus longue à calculer. Elle n'est pas utilisée pour la suite des simulations réalisées.

## 2.5 Transformation modale modifiée

Cette méthode consiste à définir autrement les matrices de transformation dans le modale, pour éviter l'apparition de toutes vitesses modales supérieures à la vitesse de la lumière. Cette méthode n'est cependant valide que pour les lignes aériennes.

La matrice **D** qui correspond au résidu de **Z** lorsque  $s$  tend vers l'infini, peut être décomposé de la manière suivante :

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{K}_\infty \quad (133)$$

Où  $\mathbf{L}_0$  est la matrice d'inductance géométrique, et  $\mathbf{K}_\infty$  le résidu du lissage sans  $\mathbf{L}_0$ .

$$\mathbf{DC} = \mathbf{L}_0\mathbf{C} + \mathbf{K}_\infty\mathbf{C} = \varepsilon_0\mu_0\mathbf{U} + \mathbf{K}_\infty\mathbf{C} \quad (134)$$

La propriété qui est utilisée est que la matrice d'inductance géométrique multipliée par la matrice de capacitance géométrique donne une matrice diagonale dont tous les éléments sont égaux au produit de la permittivité du vide et de la perméabilité du vide.

On définit alors les matrices de transformation comme suit :

$$\mathbf{T}_V^{-1} \mathbf{K}_\infty \mathbf{C} \mathbf{T}_V = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{C} \mathbf{K}_\infty \mathbf{T}_I = \mathbf{\Lambda}' \quad (135)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{U} + \mathbf{\Lambda}' \quad (136)$$

A partir  $\mathbf{\Lambda}$  on peut calculer les vitesses modales et poursuivre les étapes classiques de la méthode décrite dans le Chapitre 1.

Le  $\mathbf{L}_0$  est obtenu à partir de la configuration spatiale de la ligne. Pour l'obtenir, la méthode a été de prendre le modèle de ligne de EMTP-RV et de retirer tous les effets résistifs qui induisent des pertes. La résistance des fils ainsi que la résistivité du sol sont mises à zéro. La matrice d'impédance série obtenue est divisé par  $s$  et on obtient  $\mathbf{L}_0$ .

Le lissage est alors réalisé en retirant  $\mathbf{L}_0$  de  $\mathbf{D}$  dans l'équation (101):

$$\frac{1}{s} (\mathbf{Z}(s) - \mathbf{R}_{DC}) - \mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{K}_i}{s - p_i} \quad (137)$$

Voici maintenant l'évolution des vitesses modales en fonction du nombre pôles avec cette nouvelle méthode :

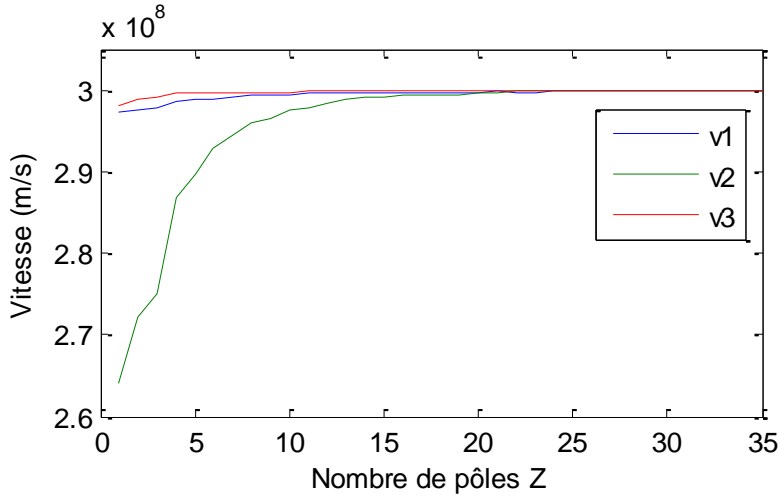


Figure 2-18: Évolution des vitesses modales en fonction du nombre de pôles (transformation modale modifiée)

On voit que cette méthode permet d'éviter l'apparition de toutes vitesses modales supérieures à la vitesse de la lumière.

Vu la forte croissance de  $v_2$  autour de 5 pôles, la comparaison des erreurs se fera avec un cas à 10 pôles et le cas à 20 pôles.

## 2.6 Tri des pôles obtenus après les repositionnements

Après les nombreux essais vus précédemment, il est évident que le nombre pôles a une forte influence. Il a été montré dans la section 2.3 que dans certains cas, les vitesses modales calculées pouvaient être complexes. Mis à part les données des échantillons de fréquence des matrices d'impédance série et d'admittance shunt, les pôles sont l'autre paramètre d'entrée du calcul des résidus. Les valeurs des pôles obtenus après les repositionnements ont alors été vérifiées.

Une difficulté importante pour comparer les valeurs des pôles est que leur nombre est différent. Il est donc impossible de comparer par exemple le 10<sup>ème</sup> pôle d'une série ou le 10<sup>ème</sup> d'une autre. Un critère objectif est alors de comparer les valeurs des pôles extrêmes, le premier à basse-fréquence et le dernier des hautes-fréquences.

Ci-dessous les valeurs de ces deux pôles sont comparées aux pulsations du premier et dernier échantillon. Pour la comparaison, les valeurs positives ont été prises, mais les pôles sont à valeur négatives.

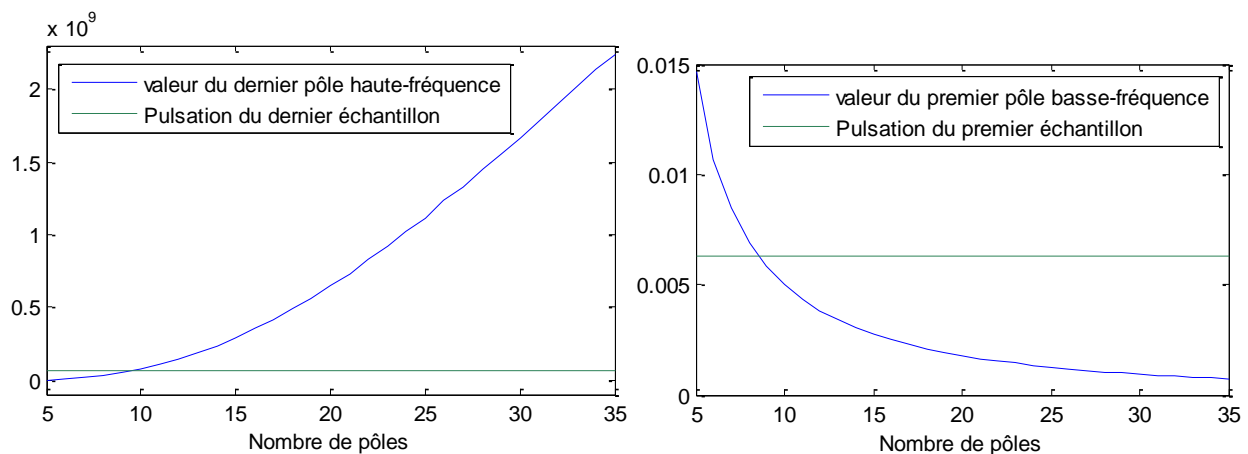


Figure 2-19: Comparaison des pulsations et pôles extrêmes (câble1c): HF (a) et BF (b)

On voit qu'à basse fréquence la valeur du pôle se stabilise, mais qu'à haute fréquence la valeur ne fait que croître. Pour 35 pôles, le dernier pôle est plus de 35 fois supérieur à la dernière pulsation. Comme les vitesses modales sont calculées avec les résidus pour  $s$  tend vers l'infini, le fait d'avoir le dernier pôle très élevé a une influence sur la valeur de ces résidus. Une idée a alors été de retirer ce dernier pôle.

Ci-dessous une comparaison des 3 vitesses modales les plus faibles avec et sans le retrait du dernier pôle.

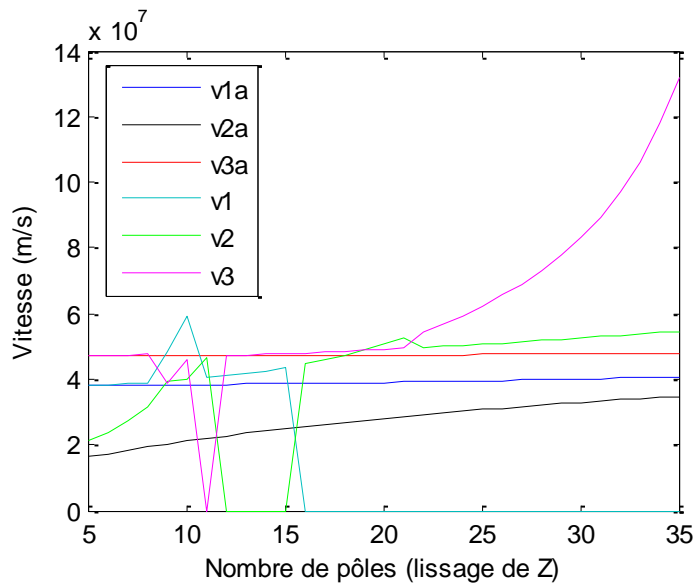


Figure 2-20: Comparaison des vitesses modales avec conditionnement (câble1c), tous les pôles (1,2,3) et sans le pôle haute-fréquence (1a,2a,3a)

On voit que les vitesses restent réelles, mais les valeurs diffèrent assez du cas avec tous les pôles. La vitesse v2a est aussi croissante mais a quand même tendance à se stabiliser.

A titre de comparaison, voici les valeurs des vitesses modales que le logiciel EMTP-RV calcule pour ce type de câble.

$$4.7556821 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$3.8712730 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$1.8210776 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Ces valeurs correspondent aux trois modes les plus lents. Dans la méthode ULM les modes qui ont des vitesses très proches sont regroupés. Ces trois modes les plus rapides ont un délai de propagation de  $56.03656 \mu\text{s}$ , ce qui est identique à la valeur de  $\tau$  calculé avec la MdC.

Les deux plus grandes valeurs citées restent proches des courbes de  $v_{1a}$  et  $v_{3a}$  pour toute la plage de pôle testé. Mais pour la vitesse la plus lente, la MdC ne s'en approche qu'avec un faible nombre de pôle.

Des cas stables existent pour un nombre de pôles égal à cinq mais le manque de précision sur le lissage de l'impédance et de l'admittance entraîne de forte erreur sur la simulation temporelle de ce câble1.

On voit cependant sur la figure suivante qu'avec le retrait du dernier pôle haute-fréquence, l'erreur de lissage augmente. De plus l'écart se creuse lorsque le nombre de pôles augmente.

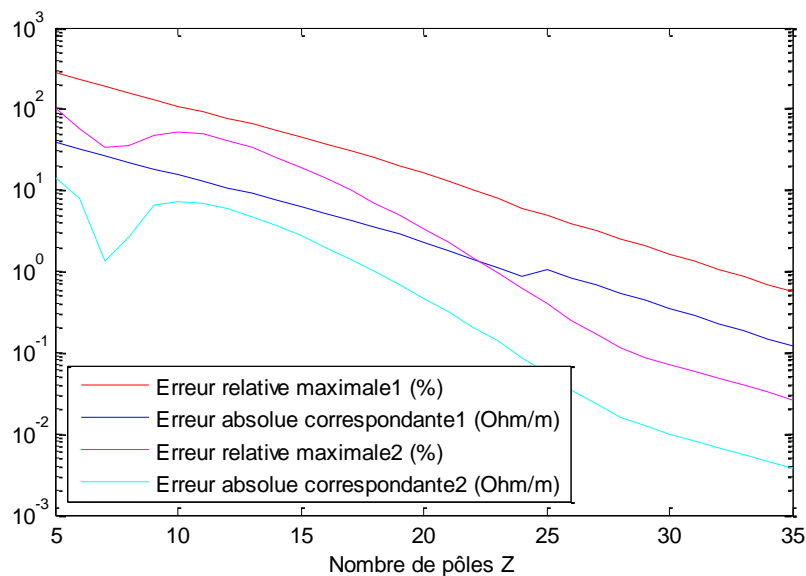


Figure 2-21: Erreurs de lissage de  $Z$  avec conditionnement (câble1c), standard (2) et avec retrait du pôle HF (1)

Le retrait du dernier pôle haute-fréquence est donc une solution pour avoir des vitesses modales réelles. Mais elle n'est pas une solution généralisable car l'erreur de lissage est accrue, et peut parfois à nouveau entraîner l'apparition de vitesses modales complexes. Ceci même en fixant un critère sur le dépassement du dernier pôle haute-fréquence par rapport à la pulsation du dernier échantillon de fréquence.

## CHAPITRE 3 MÉTHODE DE RÉOLUTION DU SYSTÈME

La méthode décrite dans le Chapitre 1 est la méthode proposée dans [15]. Elle consiste à retirer la discrétisation spatiale en intégrant le système d'équations différentielles sur la longueur totale de la ligne.

Tout d'abord cette méthode a été testée sur les exemples de ligne et de câble cités dans la section 1.4. L'influence sur la simulation de différents paramètres comme le pas de temps, la résistivité du sol (pour les lignes) et la longueur du système de transmission a été vérifiée.

Enfin des variantes dans la méthode de résolution ont aussi été proposées et testées : utilisation des courbes caractéristiques sans interpolation spatiale, implémentation complète de la matrice  $\mathbf{Y}$ , et subdivision du système de transmission en plusieurs modèles en cascade.

### 3.1 Méthode standard et constatations : ligne

Dans un premier cas une ligne de longueur de 300km est étudiée. Ci-dessous un rappel du circuit électrique qui est utilisé pour les simulations :

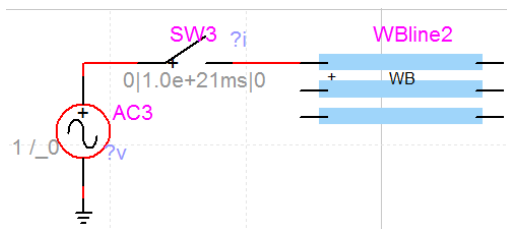


Figure 3-1. Circuit électrique pour l'alimentation de la ligne aérienne

La phase 1 de la ligne est alimentée lorsque la tension de la source est à son maximum, soit 1pu. L'angle sur le graphique est de  $0^\circ$  car la fonction est un cosinus.

Le délai de propagation du mode le plus rapide  $\tau$  est d'environ 1ms. Les valeurs précises sont indiquées dans le Tableau 3.1.

Le processus de conditionnement pour les calculs des résidus n'a pas été utilisé pour les cas suivant. Ceci car sous 16 pôles le conditionnement ne change rien, et qu'après 16 pôles les vitesses peuvent être supérieures à celle de la lumière ou devenir complexes.

Pour avoir des vitesses réalistes, c'est-à-dire inférieures à la vitesse de la lumière, et un nombre de pôle faible, deux cas ont été comparés : l'un avec 5 pôles et le second avec 20 pôles.

Tableau 3.1: Délai de propagation du mode le plus rapide et vitesses modales pour la cas de ligne

	<b>5 pôles</b>	<b>20 pôles</b>
$\tau$ (ms)	1.000691415029	1.000709019331
Vitesses modales	2.995489184825222	2.997142533848314
(m/s) (*10e8)	2.988293155764996	2.991415729226513
	2.997927188087220	2.997874449064728

Ci-dessous les courbes de EMTP-RV et de la méthode des caractéristiques (MdC) pour le cas de 20 pôles :

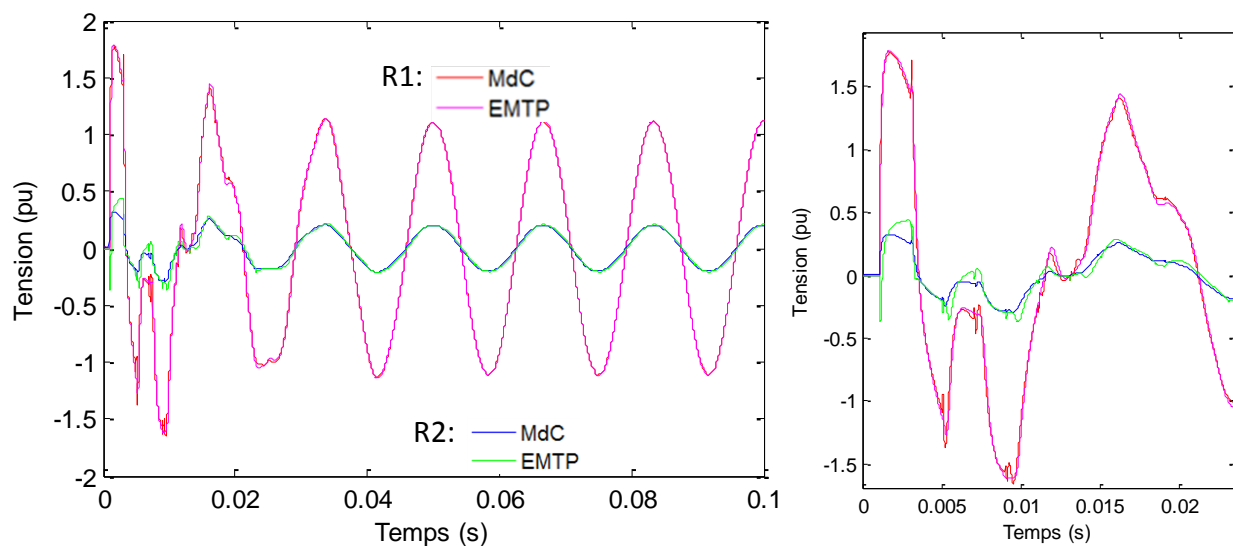


Figure 3-2: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (300km, 20 pôles,  $\Delta t=10\mu s$ )

Les courbes R1 et R2 correspondent aux tensions des phases 1 et 2 de l'extrémité réceptrice. On voit qu'en régime permanent la différence entre les courbes est minime mais que pour la partie transitoire, des écarts non négligeables apparaissent. Afin de voir plus clairement cette différence, elle a été calculée et affichée sur la figure suivante. L'erreur relative entre les courbes ne peut pas être utilisée car à chaque les passages par zéro elle donnerait une erreur relative infini. Une erreur absolue en pu est alors utilisée pour comparer les deux courbes.

L'erreur de la tension de la phase 2 de l'extrémité émettrice (S2) a aussi été ajoutée.

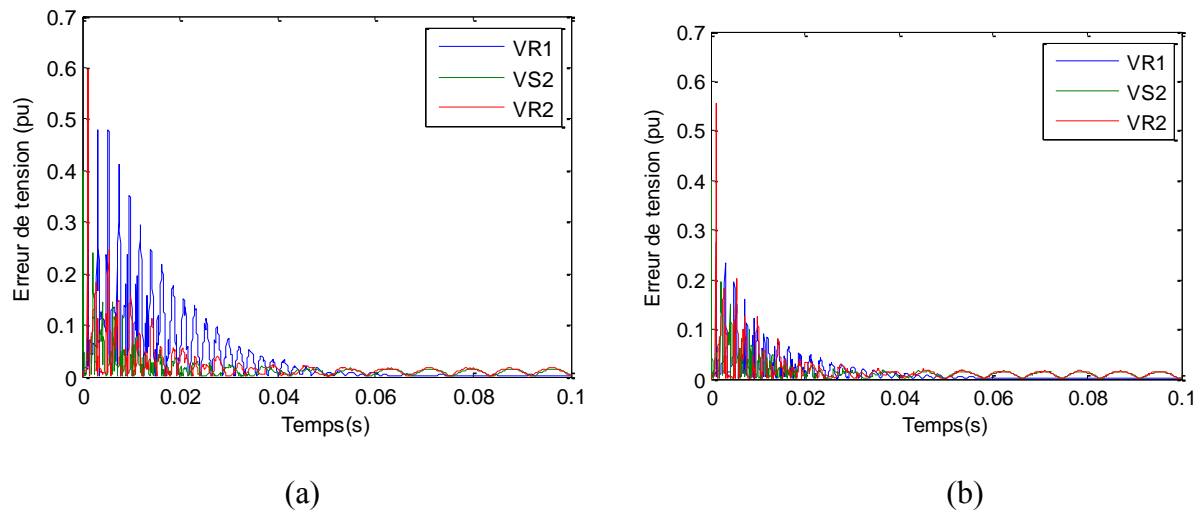


Figure 3-3: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne ( $\Delta t=10\mu s$ ) : 5 pôles (a), 20 pôles (b)

On voit que l'erreur est assez importante, mais est réduite dans le cas où 20 pôles ont été utilisés pour le lissage de l'impédance série.

Tableau 3.2: Erreur maximale en régime permanent, cas de ligne (300km,  $\Delta t=10\mu s$ )

	Amplitude maximale En régime permanent EMTP-RV (pu)	5 pôles		20 pôles	
		Erreur (*10e-3 pu)	Erreur Relative (%)	Erreur (*10e-3 pu)	Erreur Relative (%)
VR1	1.145	3	0.3	1.5	0.1
VR2	0.206	17	8.3	16	7.8
VS2	0.207	15	7.2	15	7.2

L'amplitude maximale et l'erreur sur la troisième phase est quasiment identique à celle de la seconde. C'est pourquoi elle n'apparaît pas dans le tableau ci-dessus. L'erreur relative est calculée par rapport à l'amplitude maximale de l'onde en régime permanent.

Un point important est que l'erreur sur la phase 2 du côté récepteur (en rouge sur la Figure 3-3) est supérieure à 0.5 pu alors qu'elle n'est pas alimentée. On voit sur la Figure 3-2 (b) avec les courbes bleue et verte que l'une décroît alors que l'autre croît.



Un autre point qui pose problème au début de la simulation est l'augmentation de la tension à l'extrémité réceptrice avant que la première onde ne l'atteigne. Ce phénomène est présenté sur la figure suivante. Ceci est dû à l'interpolation spatiale qui est réalisée pour les modes les plus lents.

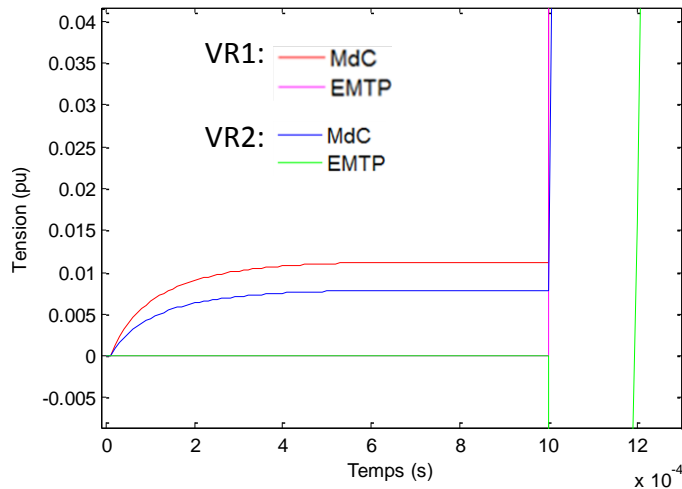


Figure 3-4: Zoom sur les premiers pas de temps, simulation des tensions, cas de ligne (300km, 20 pôles,  $\Delta t=10\mu s$ )

On voit que les courbes verte et magenta reste à zéro jusqu'à 1ms c'est-à-dire  $\tau$  alors que les courbes de la MdC augmentent déjà avant cette période. Une autre méthode est proposée pour éviter cette erreur, elle est développée dans la section 3.3.

Un exemple de ligne monophasée a aussi été testé. Un fil du cas précédent a été pris comme exemple. Ses caractéristiques physiques sont identiques, mais il a été pris à 10m du sol et sur une distance de 50km. Le fil est alimenté par une extrémité avec la même source de tension et l'autre extrémité est ouverte. Le délai de propagation  $\tau$  est de 167.1  $\mu s$ . Avec 20 pôles pour le lissage de l'impédance  $Z$  l'erreur relative maximale est de 0.15% ce qui correspond à une erreur de 1.28 $\Omega/m$ .

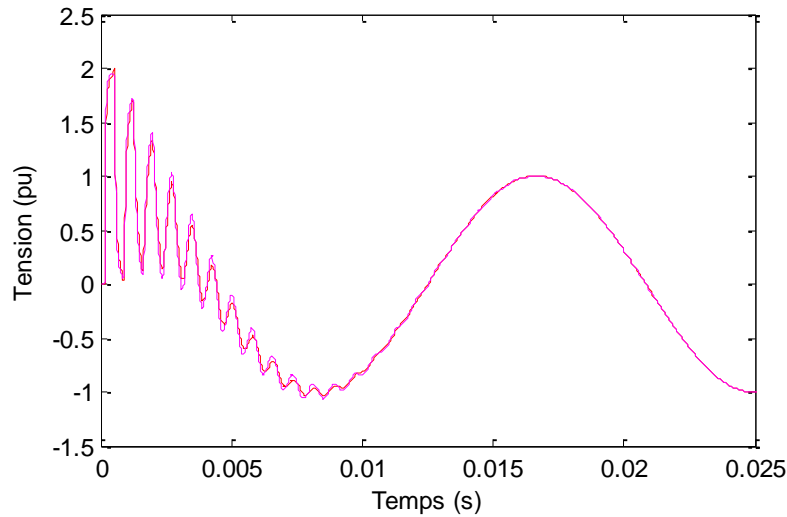


Figure 3-5 : Comparaison entre EMTP-RV et MdC pour le cas de ligne monophasée (20 pôles,  $\Delta t=10\mu s$ )

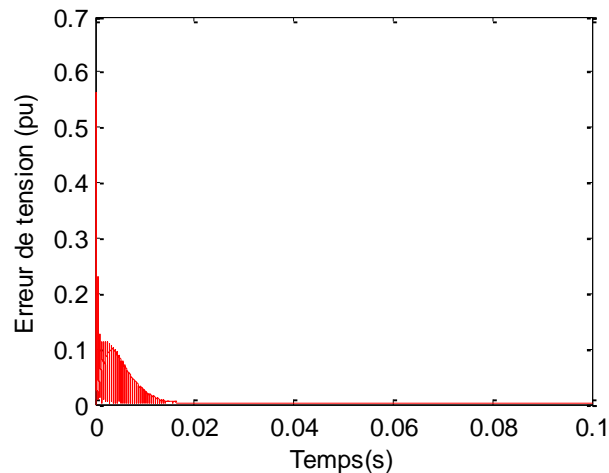


Figure 3-6 : Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, ligne monophasée (20 pôles,  $\Delta t=10\mu s$ )

L'erreur maximale en régime permanent est inférieure à  $6 \times 10^{-5}$  pu. Le premier pic est 0.562 pu. La précision en régime permanent est très bonne, mais comme dans le cas triphasé précédent, on observe un pic important de l'erreur lors du début de la simulation.

Avec le cas monophasé le lissage ne se fait sur un seul élément et est alors plus précis. De plus il n'y a pas de matrices de transformation, et cela permet d'éviter l'interpolation spatiale comme il n'y a qu'un seul mode. Ces avantages permettent de réduire grandement l'erreur en régime permanent, mais l'erreur maximale garde une valeur proche du cas triphasé précédent.

Lors de plusieurs tests, il a pu être observé que certains paramètres pouvaient agir sur la réponse temporelle et sur la précision de la MdC. Ces paramètres, qui vont être étudiés par la suite sont la résistivité du sol, longueur de la ligne et le pas de temps  $\Delta t$ .

### **Influence de la résistivité de la terre :**

La variation d'un autre paramètre a aussi été testée. Il s'agit de la résistivité du sol. Celle-ci est aussi prise en compte dans EMTP-RV pour le calcul des impédances série et admittance shunt. Pour cette analyse, les valeurs de résistivité prises correspondent à la plage de résistivité des différents types de sol (quelques  $\Omega m$  pour un sol argileux à la dizaine de millier d' $\Omega m$  pour un sol granitique).

Tableau 3.3 : Erreurs (pu) pour différentes résistivité du sol pour une ligne de 300km ( $\Delta t = 10\mu s$ )

$\rho_{sol}$ ( $\Omega m$ )	20 pôles			
	Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VR1	VR2
1	0.231	0.436	1.68E-03	0.0025
10	0.216	0.476	5.26E-04	0.0105
100	0.274	0.554	1.42E-03	0.0164
1000	0.401	0.622	6.92E-03	0.0257
1E+04	0.631	0.753	24.7E-03	0.0869

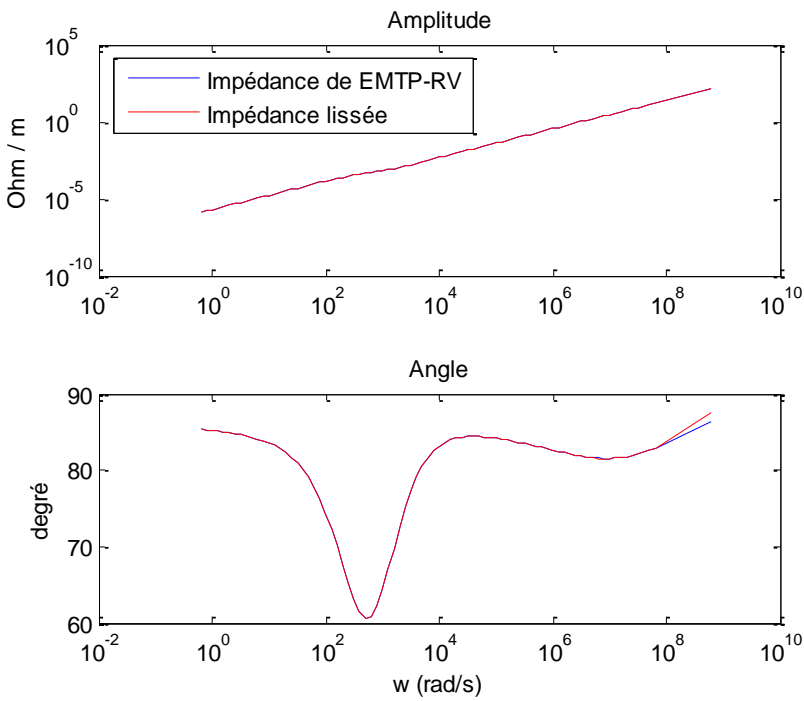
On voit que la résistivité du sol a, avec les autres conditions constantes, une influence sur le résultat de la simulation temporelle. On remarque que l'augmentation de cette résistivité augmente l'erreur. On note toutefois que pour une résistivité de  $1\Omega m$ , certaines erreurs augmentent comparativement au cas avec  $10\Omega m$ .

L'augmentation de cette erreur est due au lissage. En effet, l'augmentation de la résistivité du sol a un effet négatif sur la précision du lissage de l'impédance série :

Tableau 3.4: Erreur relative maximale du lissage de  $\mathbf{Z}$  (20 pôles)

$\rho_{sol} (\Omega m)$	1	10	100	1000	10 000
Erreur relative max (%)	0.163	0.299	0.627	1.441	3.092

On voit sur la courbe suivante un écart sur l'angle sur les derniers échantillons de fréquence.

Figure 3-7 : Lissage de  $\mathbf{Z}$  pour le cas de ligne ( $\rho_{sol} = 10^4 \Omega \cdot m$ ), 20 pôles, élément (2,1)

### **Influence de la longueur de la ligne :**

Une ligne de même structure est étudiée, mais sa longueur a été modifiée à 100 km. Le délai de propagation du mode le plus rapide est donc trois fois plus petit que dans le cas précédent où la ligne faisait 300 km :

5 pôles : 0.3335638050095654 ms

20 pôles : 0.3335696731102193 ms

Ci-dessous la forme des ondes VR1 et VR2 obtenues avec la MdC et comparées à celles de EMTP-RV :

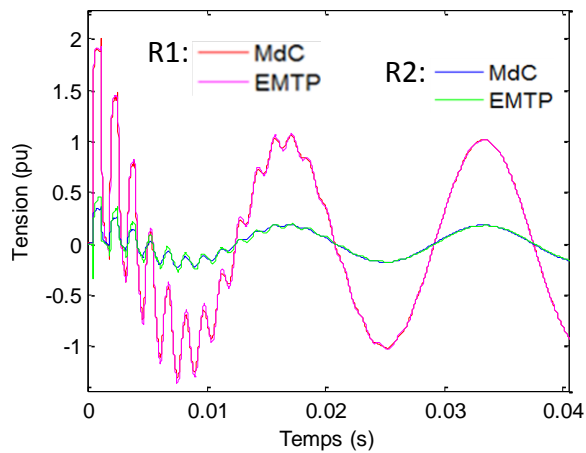


Figure 3-8: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (100km, 20 pôles,  $\Delta t=10\mu s$ )

Comme précédemment, l'erreur en pu est montrée pour plus de clarté :

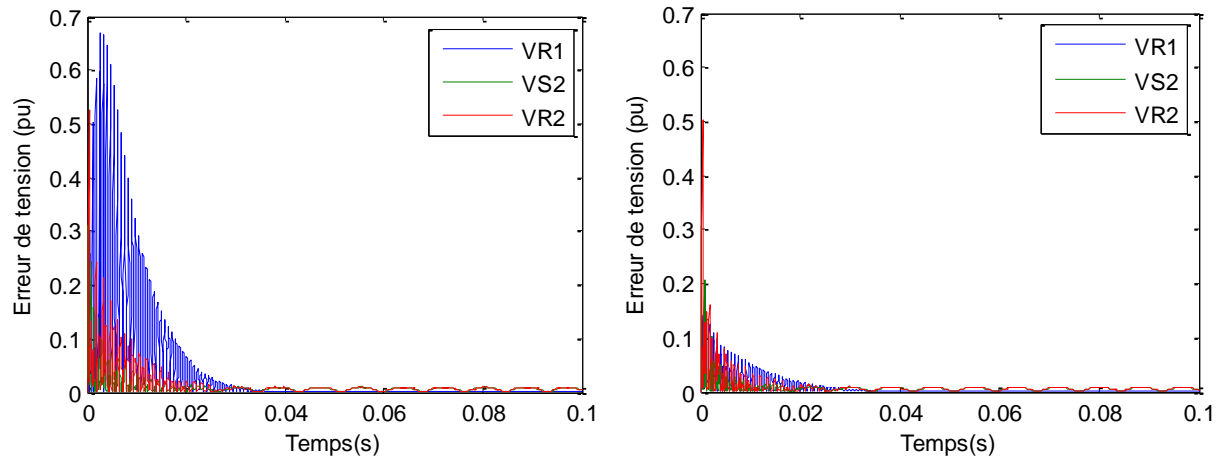


Figure 3-9: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne (100km,  $\Delta t=10\mu s$ ) : 5 pôles (a), 20 pôles (b)

A nouveau l'erreur est importante et atteint 0.5pu dans les deux cas. On constate aussi que pour la phase transitoire, le cas avec 5 pôles est pire que le cas précédent avec une ligne de 100km. L'erreur sur VR1 est bien plus importante. Mais avec 20 pôles, ce cas est plus précis qu'avec une ligne de 300km.

Tableau 3.5: Erreur maximale en régime permanent, cas de ligne (100km,  $\Delta t=10\mu s$ )

	Amplitude maximale En régime permanent EMTP-RV (pu)	5 pôles		20 pôles	
		Erreur (*10e-3 pu)	Erreur Relative (%)	Erreur (*10e-3 pu)	Erreur Relative (%)
VR1	1.012	0.25	0.02	0.12	0.01
VR2	0.177	10	5.6	9.4	5.3
VS2	0.177	10	5.6	9.4	5.3

On constate que pour une ligne d'une longueur de 100km, les erreurs relatives en régime permanent sont plus faibles que dans le cas d'une ligne de 300km.

On en déduit que la valeur de  $\tau$  (qui est directement proportionnel à la longueur de la ligne) a une influence sur la précision de la méthode.

### Influence de $\Delta t$ :

Un autre paramètre influant est le pas de temps utilisé. Il faut rappeler que pour percevoir le déplacement des ondes, le pas de temps doit être inférieur à  $\tau$ . Ceci fixe donc une limite supérieure à la valeur du  $\Delta t$ .

Voici un premier graphique qui montre l'influence du pas de temps sur les formes d'onde des tensions pour une ligne de 300km :

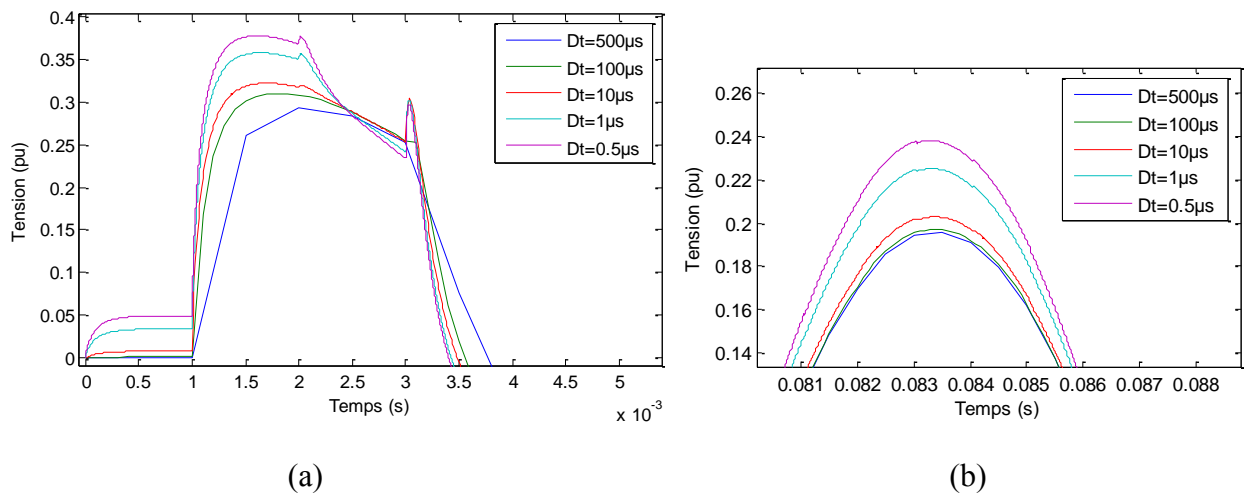


Figure 3-10: Comparaison de différent pas de temps, cas de ligne, tension VR2 (20 pôles, 300km) : première oscillation (a), sommet d'une sinusoïde en régime permanent (b)

On voit qu'une différence assez importante peut apparaître entre les différents cas, aussi bien dans la phase transitoire qu'en régime permanent. Par ailleurs, on voit sur la Figure 3-10 (b), que les petits pas de temps font augmenter l'erreur, ce qui veut dire qu'une réduction de  $\Delta t$  ne fait pas converger la solution.

L'erreur maximale seule n'est pas assez représentative de la précision de la méthode. Comme on peut le voir sur la Figure 3-9, une forte erreur ne peut être que très localisé sur les premiers pas de temps (a), ou de bien plus longue durée (b). C'est pourquoi les courbes des erreurs sont encore utilisées pour la comparaison avec le cas initial.

Ci-dessous les courbes des erreurs pour plusieurs pas de temps pour le cas d'une ligne de 100km :

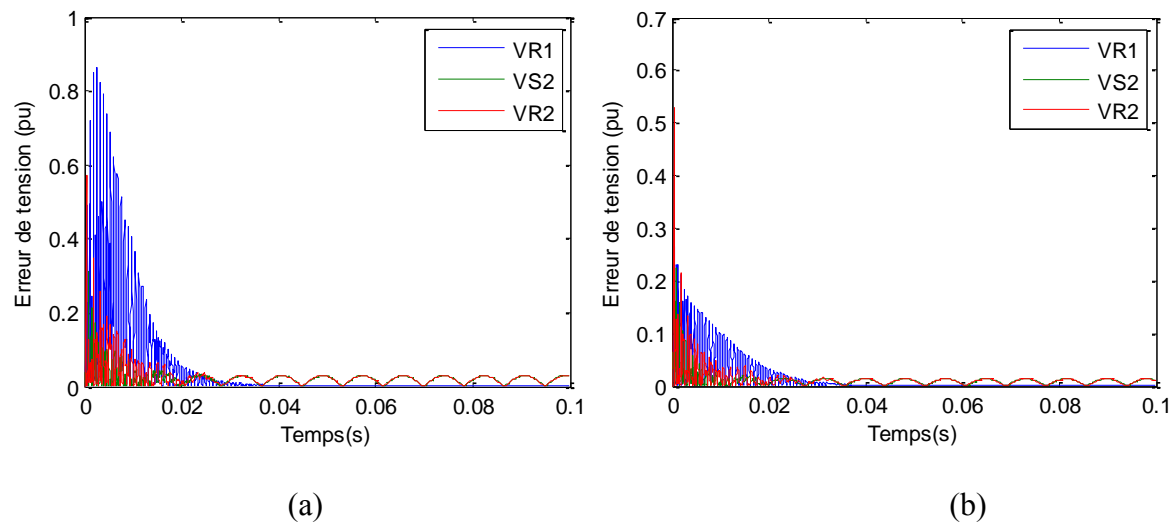


Figure 3-11. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne,  $\Delta t = 1\mu s$  (100km) : 5 pôles (a), 20 pôles (b)

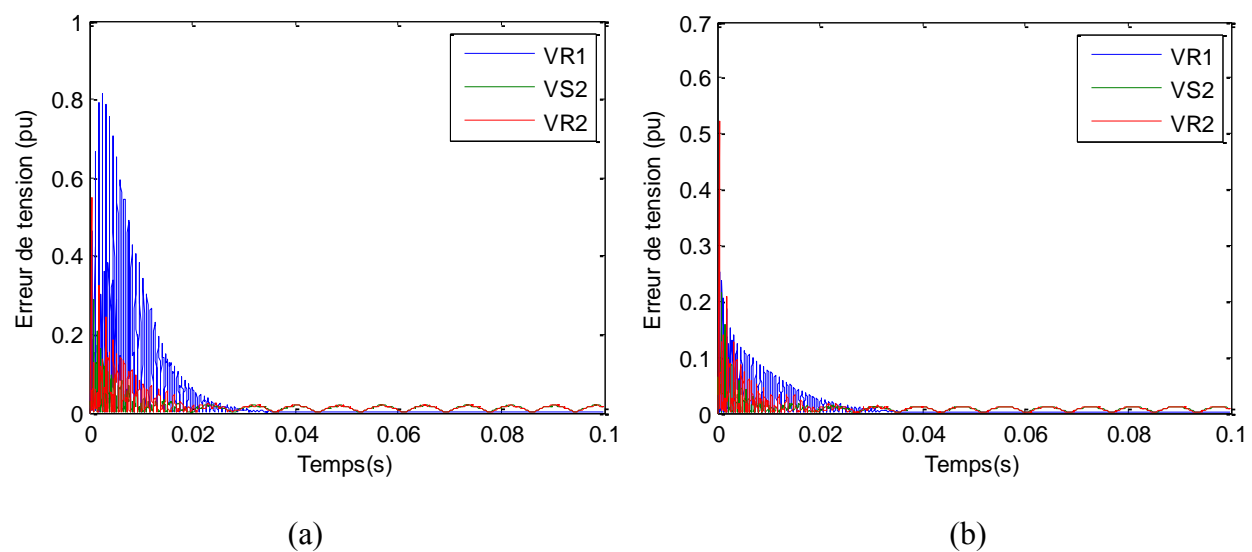


Figure 3-12. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne,  $\Delta t = 2\mu s$  (100km) : 5 pôles (a), 20 pôles (b)



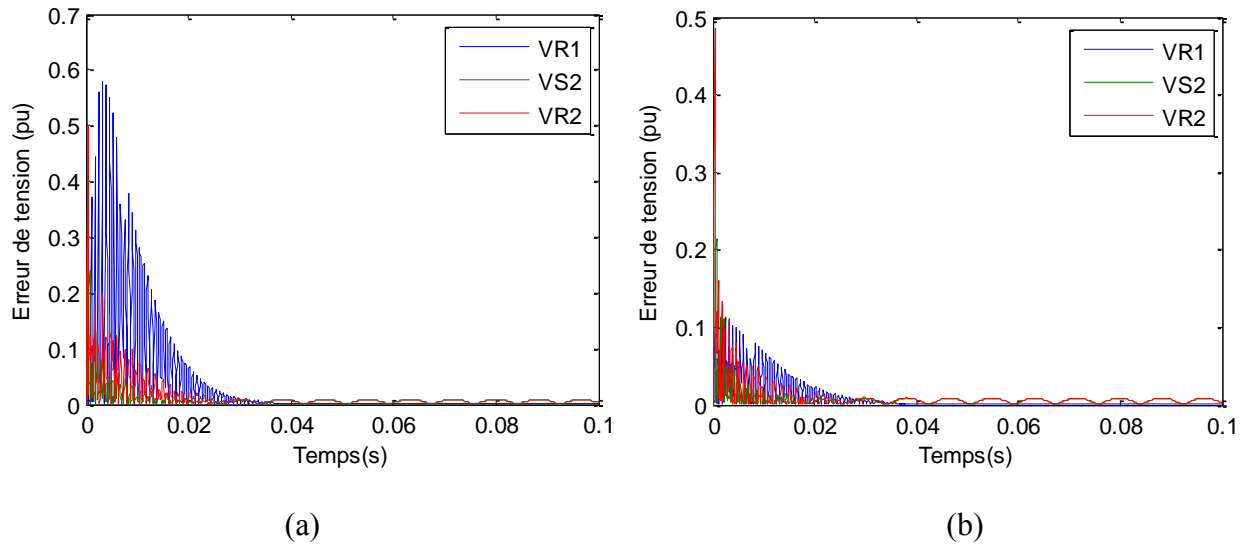


Figure 3-13. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne,  $\Delta t = 20 \mu s$  (100km) : 5 pôles (a), 20 pôles (b)

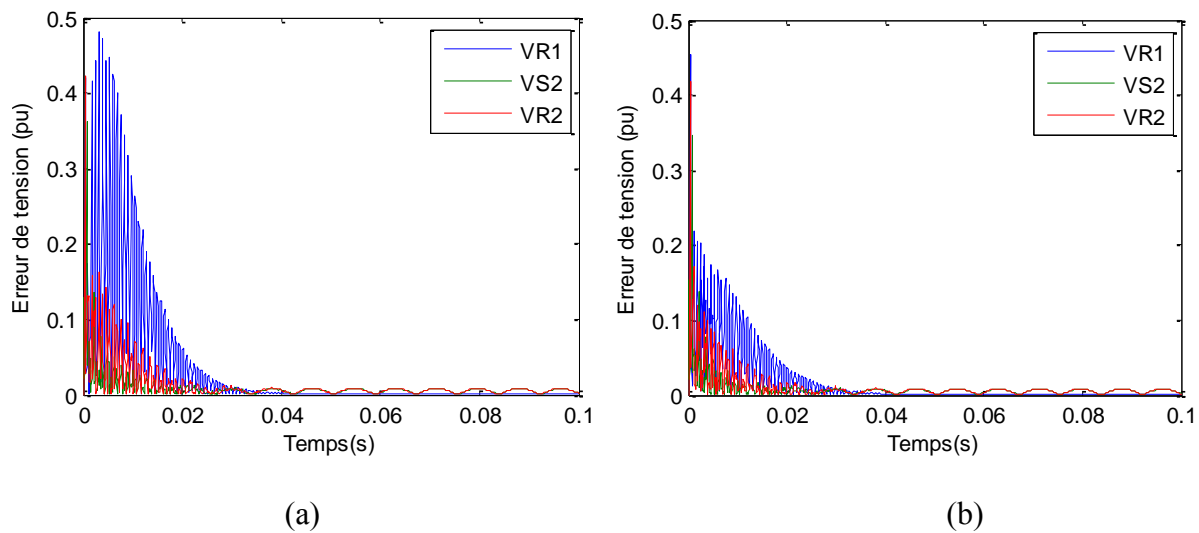


Figure 3-14. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne,  $\Delta t = 50 \mu s$  (100km) : 5 pôles (a), 20 pôles (b)

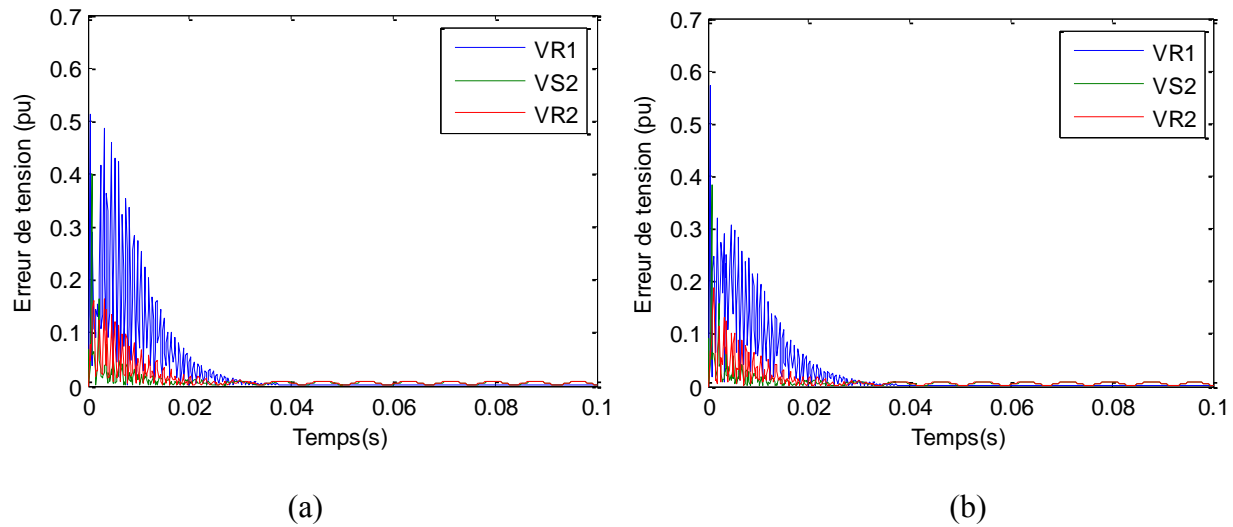


Figure 3-15. Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne,  $\Delta t=100\mu s$  (100km) : 5 pôles (a), 20 pôles (b)

De ces courbes on peut déjà voir que les erreurs sont plus faibles pour les cas à 20 pôles. Mais pour pouvoir comparer quantitativement les différents cas, les erreurs absolues maximales et les erreurs maximales en régime permanent ont été répertoriées dans les tableaux suivants :

Tableau 3.6: Erreurs (pu) pour différents  $\Delta t$  pour une ligne de 100km

$\Delta t$	5 pôles				20 pôles			
	Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)		Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2
1 $\mu s$	0.862	0.574	7.73E-04	0.0297	0.265	0.529	2.97E-04	0.0144
2 $\mu s$	0.812	0.550	5.08E-04	0.0190	0.251	0.521	2.16E-04	0.0118
10 $\mu s$	0.668	0.527	2.38E-04	0.0099	0.142	0.504	1.15E-04	0.0093
20 $\mu s$	0.578	0.501	2.00E-04	0.0090	0.115	0.486	9.78E-05	0.0087
50 $\mu s$	0.481	0.423	1.80E-04	0.0083	0.454	0.417	9.55E-05	0.0084
100 $\mu s$	0.514	0.164	1.87E-04	0.0083	0.572	0.186	1.22E-04	0.0083

Tableau 3.7: Erreurs (pu) pour différents  $\Delta t$  pour une ligne de 300km

$\Delta t$	5 pôles				20 pôles			
	Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)		Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2
1 $\mu$ s	0.761	0.713	0.0248	0.0713	0.375	0.596	7.03E-03	0.0283
2 $\mu$ s	0.643	0.660	0.0129	0.0415	0.311	0.579	4.59E-03	0.0213
10 $\mu$ s	0.480	0.596	0.0033	0.0171	0.274	0.554	1.42E-03	0.0164
20 $\mu$ s	0.434	0.580	0.0022	0.0165	0.308	0.545	7.46E-04	0.0163
50 $\mu$ s	0.362	0.556	0.0016	0.0170	0.130	0.528	9.30E-04	0.0168
100 $\mu$ s	0.301	0.531	0.0015	0.0172	0.112	0.510	1.25E-03	0.0170
500 $\mu$ s	0.339	0.192	0.0031	0.0171	0.424	0.184	2.88E-03	0.0170

Plusieurs constatations sont à faire à partir de ces deux tableaux.

Tout d'abord on confirme l'influence importante qu'a le pas de temps sur le résultat des simulations. On peut observer, par exemple, que pour une ligne de 300km et 20 pôles, l'erreur maximale de VR2 passe du simple au triple entre un  $\Delta t$  de 500 $\mu$ s et 1 $\mu$ s.

Avec 5 pôles, l'erreur max de VR1 est plus faible avec 300km qu'avec 100 km, et c'est le contraire avec la tension VR2.

Avec 5 et 20 pôles, l'erreur en régime permanent est bien plus faible pour une ligne de 100km que de 300km. Pour VR1 la différence peut dépasser le facteur 10.

Dans les quatre cas, l'erreur maximale de VR2 diminue lorsque le pas de temps augmente. Pour toutes les autres grandeurs l'évolution n'est pas monotone. Elles décroissent d'abord puis augmente à nouveau sur le dernier ou les deux derniers pas de temps étudiés. Voici un exemple :

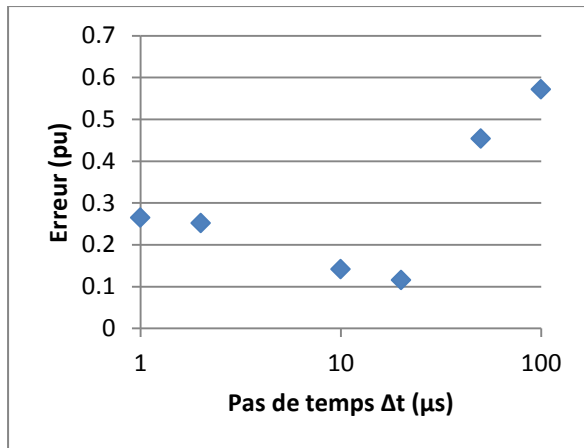


Figure 3-16: Erreur maximale VR1 (20 pôles, 100km) en fonction de  $\Delta t$

On voit qu'il existe un pas de temps qui donne une erreur minimale. Mais comme pour d'autres erreurs l'évolution est monotone, il est difficile de trouver un pas de temps optimal. Par ailleurs, même dans un cas relativement optimal (le cas de la ligne de 100km, avec 20 pôles et un pas de 20 $\mu s$ ), l'erreur reste relativement importante (0.486 pu pour l'erreur max VR2) même si elle est très ponctuelle.

Des valeurs en microseconde non entières ont aussi été testées, notamment des diviseurs de  $\tau$ . Ceci afin d'éviter l'interpolation temporelle, comme  $t - \tau$  est alors égale à  $t - k \cdot \Delta t$ , où  $k$  est un entier naturel. Des valeurs de  $k$  allant de 1 à plusieurs centaines ont été testées, mais la précision des simulations reste similaire aux cas où le  $\Delta t$  est entier.

Avant de passer au cas des câbles souterrains, voici les erreurs obtenues en utilisant la méthode de transformation modale citée dans la section 2.5.

Tableau 3.8: Erreurs (pu) pour différents  $\Delta t$  pour une ligne de 300km (transformation modale modifiée)

$\Delta t$	10 pôles				20 pôles			
	Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)		Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2
1 $\mu$ s	0.652	0.685	0.0194	0.0771	0.281	0.569	3.14E-3	0.0175
2 $\mu$ s	0.518	0.644	0.0136	0.0548	0.256	0.561	1.80E-3	0.0163
10 $\mu$ s	0.284	0.581	0.0051	0.0241	0.284	0.547	4.67E-4	0.0163
20 $\mu$ s	0.279	0.563	0.0031	0.0188	0.315	0.541	5.05E-4	0.0167
50 $\mu$ s	0.161	0.538	0.0016	0.0169	0.124	0.526	7.15E-4	0.0170
100 $\mu$ s	0.134	0.516	0.0013	0.0168	0.117	0.509	1.01E-3	0.0171
500 $\mu$ s	0.408	0.180	0.0030	0.0170	0.428	0.184	2.85E-3	0.0169

On peut voir quelques faibles améliorations comparativement au Tableau 3.7. Mais il ne faut pas oublier que la colonne de gauche du tableau ci-dessus est avec 10 pôles et non pas 5. Les résultats restent très similaires à la méthode standard.

Cette méthode règle le problème des valeurs des vitesses modales trop élevées pour les cas de lignes. Mais elle n'apporte rien quant à la précision de la méthode.

### 3.2 Méthode standard et constatations : câbles

La méthode étant étudiée pour un cas de ligne, le cas des câbles est maintenant abordé. L'analyse est développée différemment car des problèmes de stabilité sont très présents. Les cas stables sont plus précis que pour les lignes, mais la stabilité devient très sensible à différents paramètres comme les pôles du lissage et le pas de temps.

Tout d'abord un cas stable est montré pour voir la précision qui atteinte dans ce cas.

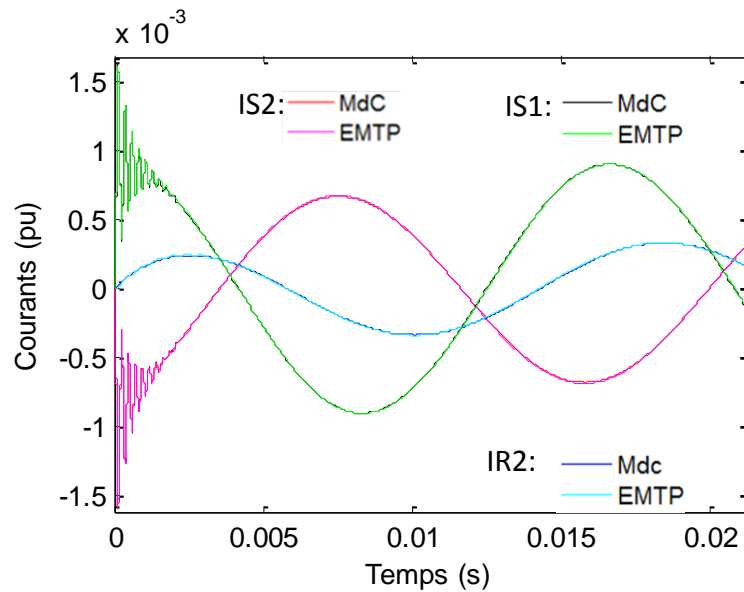


Figure 3-17: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas câble1c (10km, 30 pôles,  $\Delta t=1\mu s$ )

Ce cas a été réalisé avec 30 pôles pour le lissage de l'impédance série. Mais pour la matrice **C** la méthode qui consiste à prendre le dernier échantillon de fréquence de **Y** divisé par  $s$ , ne permet pas d'avoir des cas stables. Pour le cas ci-dessus, la matrice **C** a été obtenue en faisant un lissage pondéré par élément avec 5 pôles. Malgré la très faible variation des vitesses modales entre un lissage classique et pondéré ( $10^{-10}$  par rapport aux vitesses), la stabilité est différente dans les deux cas. En prenant les mêmes conditions, mais en prenant le lissage standard pour **Y** la simulation est instable. Dans les exemples qui suivent, la matrice **C** est toujours prise avec un lissage pondéré par élément avec 5 pôles.

Ci-dessous la différence entre les courbes de EMTP-RV et de la MdC :

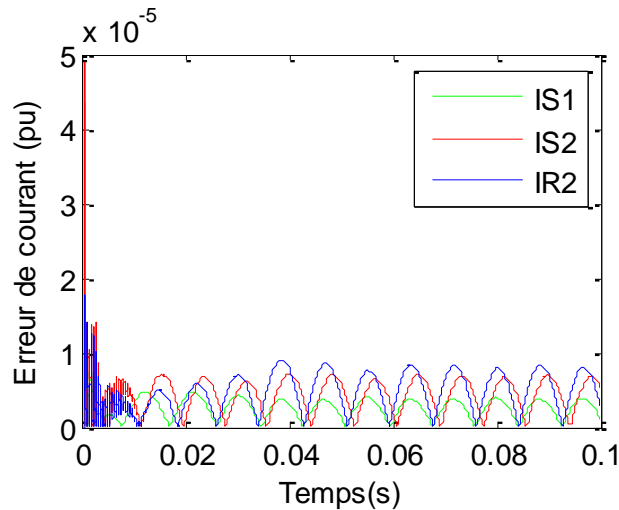


Figure 3-18: Erreur de courant (tension de 1pu), 30 pôles,  $\Delta t=1\mu s$

Tableau 3.9: Erreur maximale et en régime permanent, câbles1c (10km,  $\Delta t=1\mu s$ )

	Amplitude maximale En régime permanent EMTP-RV (*10e-4 pu)	30 pôles		
		Erreur max (*10e-5 pu)	Erreur max RP (*10e-6 pu)	Erreur Relative RP (%)
IS1	9.0412	4.340	3.952	0.44
IS2	6.8787	4.887	6.990	1.02
IR2	3.307	1.769	8.395	2.54

On observe toujours un pic de l'erreur pour les premiers pas de temps, mais ce pic est bien plus faible que pour le cas de ligne. De même pour l'erreur en régime permanent qui est aussi plus faible que pour le cas de ligne.

### **Influence de $\Delta t$ :**

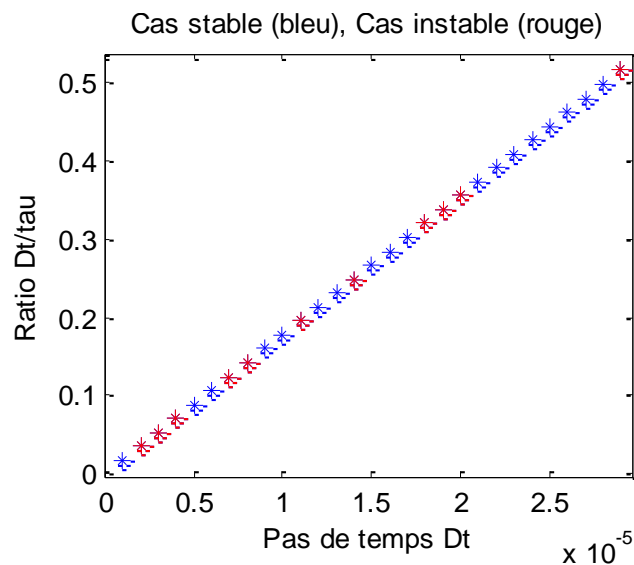
Comme précédemment la valeur du pas de temps a une influence sur le résultat de la simulation.

Le Tableau 3.10 montre les erreurs pour un autre cas avec le câble1c avec les mêmes conditions mais avec un pas de temps plus grand. On voit que l'erreur en régime permanent est très similaire au cas précédent, mais que l'erreur maximale est bien plus importante dans ce cas-ci.

Tableau 3.10: Erreur maximale et en régime permanent, câbles1c (10km,  $\Delta t=25\mu s$ )

	Amplitude maximale En régime permanent EMTP-RV (*10e-4 pu)	30 pôles		
		Erreur max (*10e-5 pu)	Erreur max RP (*10e-6 pu)	Erreur Relative RP (%)
IS1	9.0412	12.143	3.629	0.40
IS2	6.8787	13.494	7.313	1.06
IR2	3.307	1.571	8.482	2.56

Comme il est indiqué précédemment, la stabilité un problème majeur avec les câbles. La figure suivante montre l'influence de  $\Delta t$  sur la stabilité du système :

Figure 3-19: Stabilité du modèle en fonction du pas de temps  $\Delta t$  (câble1c, 10km, 30 pôles)

Les valeurs testées sont les entiers en microseconde de 1 à  $\tau$  qui est de  $56,33\mu s$ . La dernière valeur affichée est pour  $\Delta t=29\mu s$  car tous les entiers compris entre 29 et  $56\mu s$  donnent des résultats instables. La Figure 3-19 montre aussi le ratio  $\Delta t/\tau$  qui a été utilisé pour déterminer une relation entre  $\Delta t$  et  $\tau$  qui pourrait être une condition à la stabilité.



Comme le délai de propagation  $\tau$  est directement proportionnel à la longueur de la ligne, la longueur du câble  $l_c$  a été modifiée :

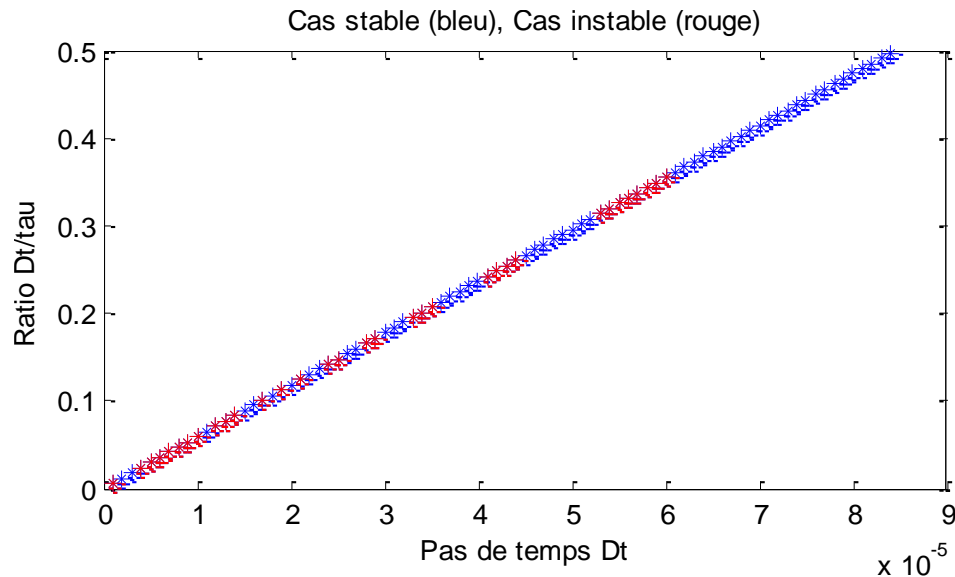


Figure 3-20: Stabilité du modèle en fonction du pas de temps  $\Delta t$  (câble  $l_c$ , 30km, 30 pôles)

La longueur du câble a été multipliée par trois (30km), on a donc un  $\tau$  d'environ  $168.9\mu s$ . Comme précédemment toutes les valeurs entières de 1 à  $168\mu s$  ont été testées. Le pas de  $84\mu s$  est le dernier pas stable jusqu'à la limite de  $168\mu s$ .

On trouve à nouveau une succession d'intervalles stables et instables. Mais sans possibilités de déterminer une condition de stabilité. Une autre tentative a été de calculer le ratio inverse, soit  $\tau/Dt$  qui donne la même succession d'intervalle mais sur une courbe de type  $1/x$ , puis de trier les points selon la partie décimale de ce ratio :

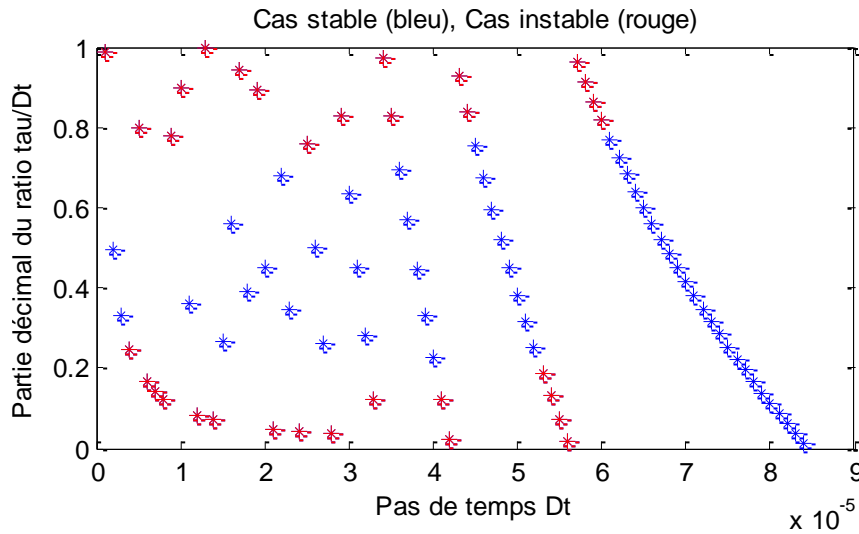


Figure 3-21: Stabilité du modèle en fonction du ratio  $\tau/\Delta t$  (câble1c, 30km, 30 pôles)

On voit apparaître une zone centrale où les simulations sont stables, mais cette zone est difficilement caractérisable. On ne peut pas la définir avec des bornes fixes sur la partie décimale de  $\tau/\Delta t$ .

Comme pour le cas de ligne, des valeurs de  $\Delta t$  diviseurs de  $\tau$  ont été testées. Des valeurs de  $k$  allant de 1 à plusieurs centaines ont été testées (avec  $\tau = k \cdot \Delta t$ ). Quelques cas stables ont été identifiés pour  $k$  égale à un et deux avec 30 pôles pour le lissage de  $\mathbf{Z}$ . Tous les autres cas testés avec différent  $k$  et nombre de pôles ont donné des simulations instables.

Pour conclure on voit que la précision est meilleure avec le câble que la ligne. Mais que les câbles ont une stabilité très fragile et il n'a pas été possible de déterminer une condition nécessaire et suffisante à la stabilité. Vu ces résultats, des modifications sur les calculs de la simulation temporelle ont été testées.

### 3.3 Intégration sans interpolation spatiale

Cette nouvelle méthode a été suggérée pour deux raisons. Celles-ci sont dues à l'interpolation spatiale réalisée dans la méthode standard. La première provient d'une constatation faite avec la méthode standard. L'augmentation erronée des paramètres à l'extrémité réceptrice avant même que la première onde ne l'atteigne. La seconde est que pour les câbles, les modes lents ont une vitesse telle que l'emplacement des paramètres est plus proche de l'extrémité opposée comme le montre la Figure 3-22.

Pour éviter ces deux phénomènes, l'idée a été d'enlever l'interpolation spatiale et de la remplacer par une interpolation temporelle pour chacun des modes. Il faut aussi rappeler qu'une interpolation temporelle est aussi déjà réalisée précédemment car  $\tau$  n'est pas forcément un multiple entier du pas de temps  $\Delta t$ .

On ne fait plus l'interpolation spatiale, on prend les valeurs réellement à S et R, et interpolation temporelle pour les modes les plus lents.

Les équations (65) et (66) sont reprises en prenant pour tau une matrice diagonale comprenant les délais de propagation de chacun des modes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{v}_{R,m}^t - \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau}) + \mathbf{Z}_w \boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{i}_{R,m}^t - \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}) + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{R}_m \left( \frac{\mathbf{i}_{R,m}^t + \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}}{2} \right) + \boldsymbol{\Gamma} \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{R,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{S,m}^{t-\tau}}{2} \right) \\ = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau}) - \mathbf{Z}_w \boldsymbol{\tau}^{-1}(\mathbf{i}_{S,m}^t - \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}) - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{R}_m \left( \frac{\mathbf{i}_{S,m}^t + \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}}{2} \right) - \boldsymbol{\Gamma} \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{S,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{R,m}^{t-\tau}}{2} \right) \\ = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (139)$$

$$\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{L} \mathbf{I} \quad (140)$$

Comme chaque mode a une vitesse différente, tous les paramètres à  $t - \tau$  sont différents du cas standard. Dans (138) et (139) on a par exemple :

$$\mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau} = \begin{cases} \mathbf{v}_{S,m,1}^{t-\tau 1} \\ \mathbf{v}_{S,m,2}^{t-\tau 2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{S,m,n}^{t-\tau n} \end{cases} \quad (141)$$

Où chaque mode est pris à  $t$  moins son propre délai de propagation.

Lorsque l'onde la plus rapide a atteint la première fois l'extrémité opposée, seul ce mode aura alors une valeur non-nulle à  $t - \tau$ . Par conséquent seul ce mode sera inclus dans les vecteurs  $t - \tau$ .

Les mêmes simplifications que pour la méthode standard peuvent être réalisées :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{R,m}^t - \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{Z}_w \boldsymbol{\tau}^{-1} (\mathbf{i}_{R,m}^t - \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}) + L \mathbf{R}_m \left( \frac{\mathbf{i}_{R,m}^t + \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau}}{2} \right) \\ + L \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{R,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{S,m}^{t-\tau}}{2} \right) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{Z}_w \boldsymbol{\tau}^{-1} (\mathbf{i}_{S,m}^t - \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}) - L \mathbf{R}_m \left( \frac{\mathbf{i}_{S,m}^t + \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau}}{2} \right) \\ - L \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{S,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{R,m}^{t-\tau}}{2} \right) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (143)$$

Comme  $\boldsymbol{\tau}$  est diagonale, il peut commuter. On peut alors simplifier le  $\boldsymbol{\tau}$  et le  $\boldsymbol{\tau}^{-1}$  de part et d'autre du  $\mathbf{Z}_w$ . On arrive alors aux équations (82) et (83) de la méthode standard mais avec :

$$\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z}_w + 0.5L \mathbf{R}_m + 0.5L\Delta t \mathbf{T}_V^{-1} \sum_{i=1}^{N_{orderZ}} \left( \frac{p_{Z,i} \mathbf{K}_{Z,i}}{1 - \Delta t p_{Z,i}} \right) \mathbf{T}_I \quad (144)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_w - 0.5L \mathbf{R}_m \quad (145)$$

La suite des calculs suit la même démarche que pour la méthode standard.

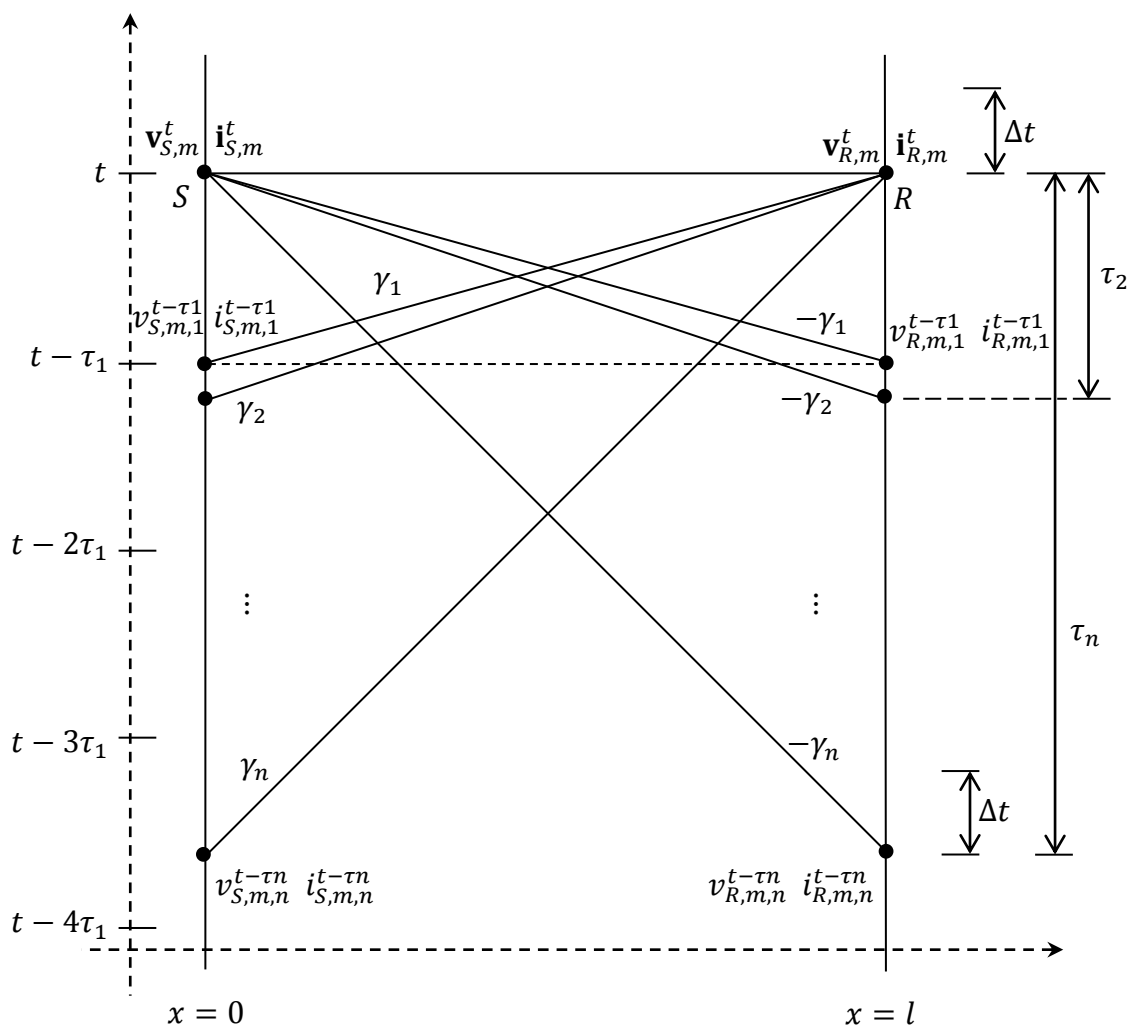


Figure 3-22: Intégration des EDO sans interpolation spatiale sur les courbes caractéristiques

### Résultats des simulations

Ci-dessous un exemple de l'erreur pour le cas de ligne. On voit que la courbe a la même forme avec le même ordre de grandeur que pour la méthode standard.

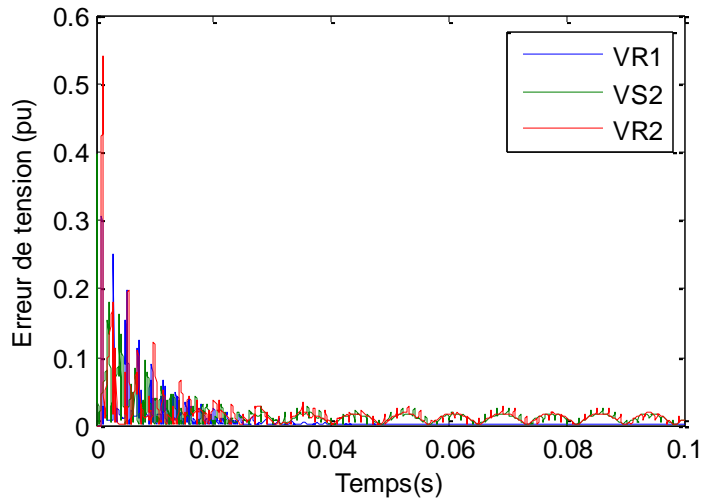


Figure 3-23: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne,  $\Delta t=10\mu s$  (300km, 20 pôles), Méthode SIS

Tableau 3.11: Erreurs (pu) pour différents  $\Delta t$  pour une ligne de 300km, méthode SIS

$\Delta t$	5 pôles				20 pôles			
	Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)		Erreur max (pu)		Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2	VR1	VR2
1 $\mu s$	0.243	0.547	0.0068	0.0329	0.243	0.547	0.0068	0.0329
2 $\mu s$	X	X	X	X	0.240	0.547	0.0051	0.0322
10 $\mu s$	X	X	X	X	0.307	0.543	0.0015	0.0256
20 $\mu s$	0.383	1.347	*	*	0.341	0.538	9.73E-4	0.0230
50 $\mu s$	0.327	0.885	0.0013	0.0383	0.118	0.525	7.89E-4	0.0209
100 $\mu s$	0.272	0.967	0.0012	0.0395	0.121	0.508	0.0011	0.0199
500 $\mu s$	0.349	0.209	0.0030	0.0329	0.430	0.184	0.0028	0.0178

On constate que les valeurs des différentes erreurs sont très proches de celles de la méthode standard. Mais il apparaît aussi des problèmes de stabilités. Les cases nommées d'un « X » sont des cas instables. Celles nommées de « \* » sont des cas stables mais où l'erreur décroît lentement et reste importante même après plusieurs milliers d'itérations. Des problèmes qui sont encore plus importants pour les câbles. En effet aucun cas stable avec les câbles 1a ou 1c n'ont pu être identifiés.

Cette méthode n'est donc pas une variante fiable pour répondre la simulation temporelle.

### 3.4 Utilisation complète du lissage de l'admittance shunt $\mathbf{Y}$

Pour tenter de résoudre les problèmes de précision et de stabilité, une autre piste a été de considérer la matrice  $\mathbf{Y}$  dans son ensemble et non pas le seul résidu lorsque  $s$  tend vers l'infini. Bien évidemment cette solution fait perdre un grand avantage de vitesse de la méthode des caractéristiques. En effet l'ajout des pôles pour lissage de  $\mathbf{Y}$  ajoute un autre produit de convolution à chaque extrémité, ce qui augmente grandement le temps de calcul.

Une hypothèse de simplification est prise en compte pour l'évaluation de la matrice d'admittance shunt :

$$\mathbf{Y}(s) = s\mathbf{C} \quad (6)$$

Dans ce cas seul les champs électriques dans l'air sont pris en compte, de plus il n'y a aucune perte shunt. Pour avoir un maximum de précision, la méthode de lissage appliquée à la matrice d'impédance série est aussi appliquée à celle d'admittance shunt :

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}_{DC} + s \left( \mathbf{C} + \sum_{i=1}^{N_Y} \frac{\mathbf{K}_{Y,i}}{s - p_{Y,i}} \right) \quad (5)$$

Il faut noter que le nombre de pôles et les pôles sont différents de ceux utilisés pour l'impédance série. C'est pourquoi, le nombre de pôle, les pôles et les résidus ont à partir de maintenant un indice Z ou Y selon qu'ils correspondent à l'impédance ou à l'admittance.

$$\frac{d\mathbf{I}(x,s)}{dx} + \left( \mathbf{G}_{DC} + s \left( \mathbf{C} + \sum_{i=1}^{N_Y} \frac{\mathbf{K}_{Y,i}}{s - p_{Y,i}} \right) \right) \mathbf{V}(x,s) = \mathbf{0} \quad (146)$$

$$\frac{d\mathbf{I}(x,s)}{dx} + \mathbf{G}_{DC} \mathbf{V}(x,s) + \mathbf{C} s \mathbf{V}(x,s) + s \left( \sum_{i=1}^{N_Y} \frac{\mathbf{K}_{Y,i}}{s - p_{Y,i}} \right) \mathbf{V}(x,s) = \mathbf{0} \quad (147)$$

L'équation est ensuite convertie dans le domaine temporel:

$$\frac{\partial \mathbf{i}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial t} + \mathbf{G}_{DC} \mathbf{v}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \mathbf{h}_Y(t - \tau) \mathbf{v}(x, \tau) d\tau = \mathbf{0} \quad (148)$$

$$\mathbf{h}_Y(t) = \sum_{i=1}^{N_Y} e^{p_{Y,i} t} \mathbf{K}_{Y,i} \quad (149)$$

En appliquant la règle de Leibniz comme pour l'impédance série, on obtient les équivalents de  $\mathbf{R}_h$  et  $\mathbf{\Psi}$  pour l'admittance:

$$\frac{\partial \mathbf{i}(x, t)}{\partial x} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{v}(x, t)}{\partial t} + \mathbf{G}_h \mathbf{v}(x, t) + \mathbf{\theta}(x, t) = \mathbf{0} \quad (150)$$

$$\mathbf{G}_h = \mathbf{G}_{DC} + \sum_{i=1}^{N_Y} \mathbf{K}_{Y,i} \quad (151)$$

$$\mathbf{\theta}(x, t) = \sum_{i=1}^{N_Y} p_{Y,i} \mathbf{K}_{Y,i} [e^{p_{Y,i} t} * \mathbf{v}(x, t)] \quad (152)$$

Ci-dessous un rappel des équations de transformation dans le domaine modal:

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{T}_V \mathbf{v}_m(x, t), \quad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{T}_I \mathbf{i}_m(x, t) \quad (20)$$

L'équation (150) devient dans le domaine modal :

$$\frac{\partial \mathbf{i}_m(x, t)}{\partial x} + \mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m(x, t)}{\partial t} + \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m(x, t) + \mathbf{\theta}_m(x, t) = \mathbf{0} \quad (153)$$

avec

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{C} \mathbf{T}_V \quad \mathbf{G}_m = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{G}_h \mathbf{T}_V \quad (154)$$



$$\boldsymbol{\theta}_m(x, t) = \mathbf{T}_I^{-1} \sum_{i=1}^N p_{Y,i} \mathbf{K}_{Y,i} [e^{p_{Y,i} t} * \mathbf{T}_V \mathbf{v}_m(x, t)] \quad (155)$$

Le système d'équations différentielles partielles devient alors :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_m(x, t)}{\partial x} + \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{i}_m(x, t)}{\partial t} + \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m(x, t) + \boldsymbol{\Psi}_m(x, t) = \mathbf{0} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_m(x, t)}{\partial x} + \mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m(x, t)}{\partial t} + \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m(x, t) + \boldsymbol{\theta}_m(x, t) = \mathbf{0} \quad (156)$$

A nouveau il faut transformer ce système d'EDP en EDO.

$$d\mathbf{i}_m = \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial x} d\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (52)$$

A partir de (156) on remplace la dérivée partielle spatiale (selon x)

$$d\mathbf{i}_m = \left( -\mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} - \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m - \boldsymbol{\theta}_m \right) d\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (157)$$

### **Description**

Pour une pente positive, on a :

$$d\mathbf{X} = \boldsymbol{\Gamma} dt \quad (49)$$

Comme  $\boldsymbol{\Gamma}$  est une matrice diagonale elle commute :

$$d\mathbf{v}_m = \left( -\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} - \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m - \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Psi}_m \right) dt + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} dt \quad (50)$$

$$d\mathbf{i}_m = \left( -\Gamma \mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} - \Gamma \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m - \Gamma \boldsymbol{\theta}_m \right) dt + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (158)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} = -\mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} - \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i} - \Gamma \boldsymbol{\Psi}_m + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \quad (51)$$

$$\mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} - \mathbf{Z}_w \Gamma \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m - \mathbf{Z}_w \Gamma \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} \quad (159)$$

En les additionnant, on obtient :

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} + \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = -\Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m - \Gamma \boldsymbol{\Psi}_m - \mathbf{Z}_w \Gamma \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m - \mathbf{Z}_w \Gamma \boldsymbol{\theta}_m \quad (160)$$

Pour une pente négative :

$$d\mathbf{X} = -\Gamma dt \quad (58)$$

$$d\mathbf{v}_m = \left( \Gamma \mathbf{D}_m \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i} + \Gamma \boldsymbol{\Psi}_m \right) dt + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} dt \quad (59)$$

$$d\mathbf{i}_m = \left( \Gamma \mathbf{C}_m \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \Gamma \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m + \Gamma \boldsymbol{\theta}_m \right) dt + \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} dt \quad (161)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} = \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} + \Gamma \mathbf{R}_m \mathbf{i} + \Gamma \boldsymbol{\Psi}_m + \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} \quad (60)$$

$$\mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial t} + \mathbf{Z}_w \Gamma \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m + \mathbf{Z}_w \Gamma \boldsymbol{\theta}_m + \mathbf{Z}_w \frac{\partial \mathbf{i}_m}{\partial t} \quad (162)$$

On soustrait la seconde à la première, et on obtient :

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} - \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m + \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Psi}_m - \mathbf{Z}_w \mathbf{\Gamma} \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m - \mathbf{Z}_w \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Theta}_m \quad (163)$$

Les deux EDO obtenues sont :

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} + \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m + \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Psi}_m + \mathbf{Z}_w \mathbf{\Gamma} \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m + \mathbf{Z}_w \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Theta}_m = \mathbf{0} \quad (160)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_m}{dt} - \mathbf{Z}_w \frac{d\mathbf{i}_m}{dt} - \mathbf{\Gamma} \mathbf{R}_m \mathbf{i}_m - \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Psi}_m + \mathbf{Z}_w \mathbf{\Gamma} \mathbf{G}_m \mathbf{v}_m + \mathbf{Z}_w \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Theta}_m = \mathbf{0} \quad (163)$$

Comme dans le cas standard, la méthode trapézoïdale est appliquée pour résoudre ces deux EDO :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{R,m}^t - \mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau} + 0.5l (\mathbf{\Phi}_{R,m}^t + \mathbf{\Psi}_{S,m}^{t-\tau}) + \mathbf{H}_K \mathbf{v}_{R,m}^t - \mathbf{H}_1 \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau} \\ + 0.5\mathbf{Z}_w l (\mathbf{\Omega}_{R,m}^t + \mathbf{\Theta}_{S,m}^{t-\tau}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (164)$$

$$\begin{aligned} -\mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{S,m}^t + \mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau} - 0.5l (\mathbf{\Phi}_{S,m}^t + \mathbf{\Psi}_{R,m}^{t-\tau}) + \mathbf{H}_K \mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{H}_1 \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau} \\ + 0.5\mathbf{Z}_w l (\mathbf{\Omega}_{S,m}^t + \mathbf{\Theta}_{R,m}^{t-\tau}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (165)$$

avec

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I} - 0.5 \mathbf{Z}_w l \mathbf{G}_m \quad (166)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_w - 0.5l \mathbf{R}_m \quad (167)$$

$$\mathbf{H}_K = \mathbf{I} + 0.5 \mathbf{Z}_w l \mathbf{G}_m + 0.5 \mathbf{Z}_w l \Delta t \mathbf{T}_I^{-1} \sum_{i=1}^{NorderY} \left( \frac{p_{Y,i} \mathbf{K}_{Y,i}}{1 - \Delta t p_{Y,i}} \right) \mathbf{T}_V \quad (168)$$

$$\mathbf{Z}_K = \mathbf{Z}_w + 0.5 l \mathbf{R}_m + 0.5 l \Delta t \mathbf{T}_V^{-1} \sum_{i=1}^{NorderZ} \left( \frac{p_{Z,i} \mathbf{K}_{Z,i}}{1 - \Delta t p_{Z,i}} \right) \mathbf{T}_I \quad (169)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_{S,m}^t = \sum_{i=1}^{NorderY} \left( \frac{\boldsymbol{\theta}_{S,i}^{t-\Delta t}}{1 - \Delta t p_{Y,i}} \right) \quad \boldsymbol{\Omega}_{R,m}^t = \sum_{i=1}^{NorderY} \left( \frac{\boldsymbol{\theta}_{R,i}^{t-\Delta t}}{1 - \Delta t p_{Y,i}} \right) \quad (170)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{S,m}^t = \sum_{i=1}^{NorderZ} \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{S,i}^{t-\Delta t}}{1 - \Delta t p_{Z,i}} \right) \quad \boldsymbol{\Phi}_{R,m}^t = \sum_{i=1}^{NorderZ} \left( \frac{\boldsymbol{\Psi}_{R,i}^{t-\Delta t}}{1 - \Delta t p_{Z,i}} \right) \quad (171)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice unité.

Le processus de simplification pour avoir le modèle de Norton est aussi appliqué à nouveau :

$$\mathbf{H}_K \mathbf{v}_{R,m}^t + \mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{R,m}^t = \mathbf{v}_{Hm}^S \quad (172)$$

$$\mathbf{H}_K \mathbf{v}_{S,m}^t - \mathbf{Z}_K \mathbf{i}_{S,m}^t = \mathbf{v}_{Hm}^R \quad (173)$$

où

$$\mathbf{v}_{Hm}^S = \mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{S,m}^{t-\tau} - 0.5 l (\boldsymbol{\Phi}_{R,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{S,m}^{t-\tau}) + \mathbf{H}_1 \mathbf{v}_{S,m}^{t-\tau} - 0.5 \mathbf{Z}_w l (\boldsymbol{\Omega}_{R,m}^t + \boldsymbol{\theta}_{S,m}^{t-\tau}) \quad (174)$$

$$\mathbf{v}_{Hm}^R = -\mathbf{Z}_1 \mathbf{i}_{R,m}^{t-\tau} + 0.5 l (\boldsymbol{\Phi}_{S,m}^t + \boldsymbol{\Psi}_{R,m}^{t-\tau}) + \mathbf{H}_1 \mathbf{v}_{R,m}^{t-\tau} - 0.5 \mathbf{Z}_w l (\boldsymbol{\Omega}_{S,m}^t + \boldsymbol{\theta}_{R,m}^{t-\tau}) \quad (175)$$

On arrive alors aux mêmes équations du modèle de Norton :

$$\mathbf{i}_R^t = -\mathbf{i}_H^S - \mathbf{Y}_K \mathbf{v}_R^t \quad (100)$$

$$\mathbf{i}_S^t = \mathbf{i}_H^R + \mathbf{Y}_K \mathbf{v}_S^t \quad (99)$$

Mais avec

$$\mathbf{i}_H^S = -\mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{v}_{Hm}^S \quad (176)$$

$$\mathbf{i}_H^R = -\mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{v}_{Hm}^R \quad (177)$$

$$\mathbf{Y}_K = \mathbf{T}_I \mathbf{Z}_K^{-1} \mathbf{H}_K \mathbf{T}_V^{-1} \quad (178)$$

### Cas de ligne

Le lissage de l'admittance shunt se fait très bien même avec un faible nombre de pôle. Pour la ligne avec 5 pôles, on arrive à une erreur relative maximale de 6.32E-16 pour une erreur en Siemens de 6.50E-19.

Voici un exemple de la différence de cette méthode avec EMTP :

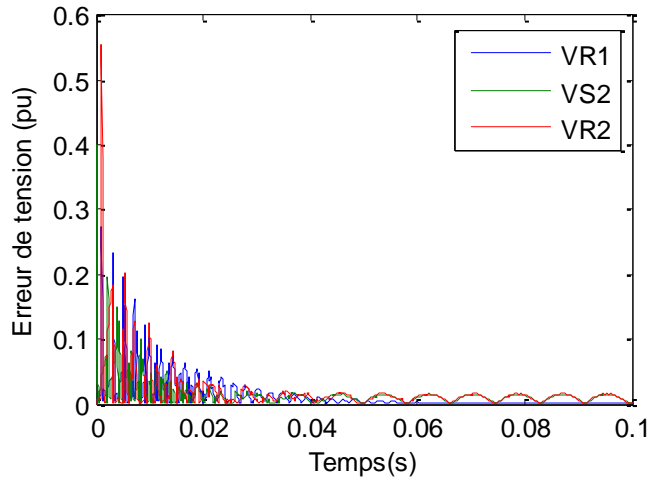


Figure 3-24: Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et la MdC, cas de ligne (300km,  $\Delta t=10\mu s$ ,  $\mathbf{Z}$  : 20 pôles,  $\mathbf{Y}$  : 5 pôles)

La forme de la courbe et les ordres de grandeurs sont à nouveau similaire à la méthode standard. Le tableau suivant montre précisément les erreurs obtenues et les comparent avec la MdC standard :

Tableau 3.12: Comparaison des erreurs maximales entre la méthode standard et celle avec  $\mathbf{Y}$  complet ( $\mathbf{Y}$  : 5 pôles) (cas de ligne)

Ligne 300km, $\Delta t = 10 \mu s$ $\mathbf{Z}$ : 20 pôles		Erreur max	Erreur max RP (*10e-3 pu)
VR1	standard	0.274	1.42
	$\mathbf{Y}$ complet	0.274	1.32
VR2	standard	0.554	16.4
	$\mathbf{Y}$ complet	0.554	16.4

Mis à part une mince amélioration sur l'erreur en régime permanent de VR1, les autres valeurs sont identiques à la méthode standard. Comme cette méthode rajoute du temps de calcul et n'apporte rien en précision, elle n'est pas non plus viable.

### **Cas de câble**

Avec le câble1c, la précision du lissage de l'admittance shunt est bien moins précis avec le même nombre pôles soit 5. L'erreur relative est de 0.1% et l'erreur absolue de 9.32E-5 S. Ces valeurs restent dans une plage acceptable, et comme le nombre de pôles doit rester aussi faible que possible, le nombre de 5 est gardé.

Comme pour la variante SIS, celle-ci est aussi sujette à de récurrents problèmes de stabilité. Quelques cas stable ont pu être trouvés mais trop rare pour vraiment être considérés.

Cette variante a aussi été testée avec la méthode sans interpolation spatiale. Mais elle n'a apporté aucune stabilité aux cas des câbles.

Vu ses inconvénients sur la vitesse de calcul et son apport quasi inexistant sur la précision, cette variante n'est pas non plus retenue.

### 3.5 Subdivision su système de transmission

Une autre piste testée pour améliorer la précision de la simulation temporelle a été de subdiviser le système de transmission. Ceci a pour effet de faire les calculs sur une distance plus faible et donc de réduire l'effet de l'interpolation spatiale. Mais chaque subdivision rajoute deux produits de convolutions, ce qui ralentit la vitesse de calcul.

Ci-dessous l'exemple d'un système divisé en deux sections :

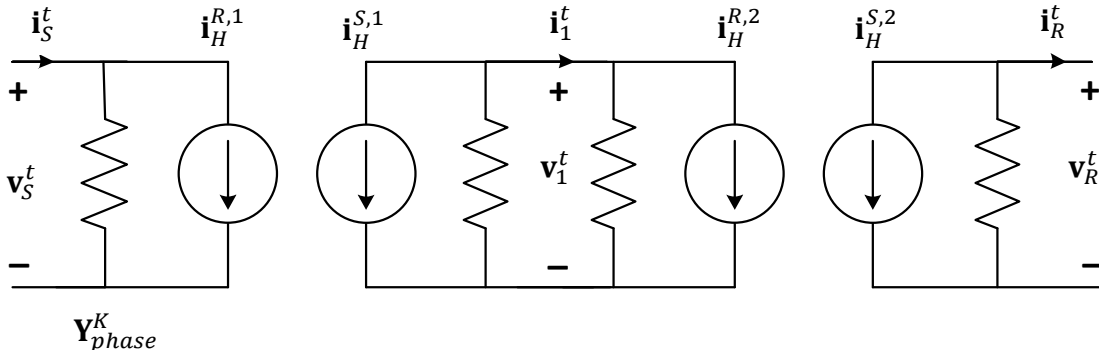


Figure 3-25 : Schéma de Norton pour un système divisé en deux modèles identiques

Comme les sections sont plus courtes, la matrice  $\mathbf{Y}_{phase}^K$  indiquée sur la Figure 3-25 est différente de celle de la Figure 1-3 du Chapitre 1. Comme  $\mathbf{Y}_{phase}^K$  n'est pas proportionnelle à la distance parcourue, ses valeurs ne sont pas divisées par le nombre de sections.

La vitesse des modes restent la même, mais comme la longueur est divisée, la valeur de  $\tau$  est aussi divisé par le nombre de sections. Par conséquent augmenter le nombre de sections limite la valeur des pas de temps utilisable car le  $\Delta t$  doit toujours être plus petit que  $\tau$ .

La tension et le courant au point intermédiaire créé sont calculés de la manière suivante :

$$\mathbf{v}_1^t = 0.5 (\mathbf{Y}_{phase}^K)^{-1} (-\mathbf{i}_H^{S,1} - \mathbf{i}_H^{R,2}) \quad (179)$$

$$\mathbf{i}_1^t = 0.5 (\mathbf{i}_H^{R,2} - \mathbf{i}_H^{S,1}) \quad (180)$$

La même formule est appliquée pour les autres points intermédiaires créés lorsque le système est divisé en plus de sections.

Comme pour la méthode standard, les courants et tensions à un instant  $t$  sont utilisés pour calculer les courants « historiques », qui sont à leur tour utilisés pour calculer les tensions et courant au pas de temps suivant.

### **Simulation temporelle du cas de ligne**

Pour cette partie concernant le cas de la ligne aérienne, la matrice  $\mathbf{C}$  a été déterminée comme il est décrit dans la section 2.1.1. La partie réelle du ratio  $\mathbf{Y}(s)/s$  pour le dernier échantillon de fréquence a été pris pour  $\mathbf{C}$ .

Voici un exemple où l'on voit clairement une amélioration par rapport au cas standard :

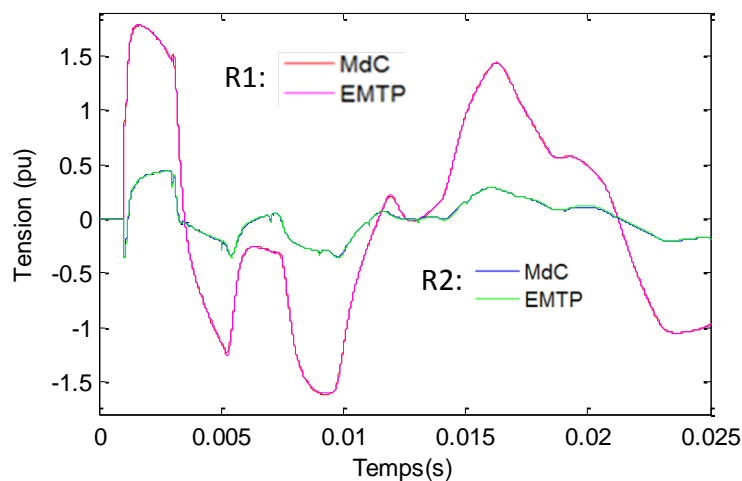


Figure 3-26: Comparaison entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (300km) divisée en 20 sections (20 pôles,  $\Delta t=10\mu s$ )



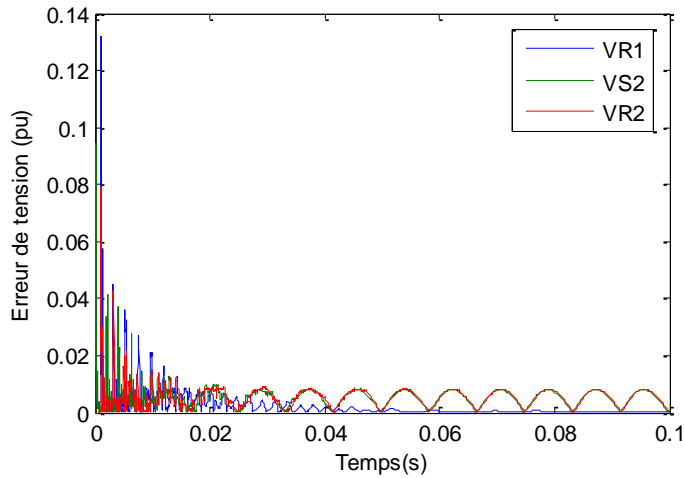


Figure 3-27 : Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et MdC, cas de ligne (300km) divisée en 20 sections (20 pôles,  $\Delta t=10\mu s$ )

Cet exemple a été pris en divisant la ligne en 20 sections. Ce nombre a été choisi comme étant le nombre maximal de subdivision. Ceci à cause du nombre important de convolutions ( $2*20=40$ ) et car un faible réduit le nombre de  $\Delta t$  admissible (comme  $\Delta t$  doit toujours être inférieur à  $\tau$ ). On voit cependant que la précision est bien améliorée, mais on reste au-dessus de 0.1pu dans les premières itérations.

Comme dans la partie précédente, plusieurs tableaux sont utilisés pour comparer la valeur des erreurs maximales et en régime permanent pour différent nombre de subdivisions et pas de temps. Ndiv correspond au nombre de sections qui divise la ligne. Dans les tableaux, une ligne avec Ndiv=1 a été gardé à titre de comparaison avec la méthode standard.

Tableau 3.13: Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour une ligne de 300km (20 pôles,  $\Delta t = 20 \mu s$ )

Ndiv	$\Delta t = 20 \mu s$				
	Erreur max (pu)			Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VS2	VR1	VR2
1	0.308	0.545	0.358	9.92E-4	0.0163
2	0.366	0.328	0.290	5.42E-4	0.0105
3	0.385	0.259	0.241	4.52E-4	9.25E-3
4	0.355	0.230	0.206	4.74E-4	8.79E-3
5	0.308	0.175	0.178	4.87E-4	8.78E-3
10	0.237	0.117	0.0998	5.39E-4	8.44E-3
20	0.306	0.168	0.196	6.59E-4	8.49E-3

Il faut noter que pour 20 sections et une ligne de 300km, la valeur de  $\tau$  est d'environ  $50\mu s$ . Un pas de temps de  $20 \mu s$  est alors relativement élevé comparé au  $\tau$ . C'est pourquoi l'erreur augmente à nouveau.

Tableau 3.14 : Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour une ligne de 300km (20 pôles,  $\Delta t = 10 \mu s$ )

Ndiv	$\Delta t = 10 \mu s$				
	Erreur max (pu)			Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VS2	VR1	VR2
1	0.274	0.554	0.400	1.42E-3	0.0164
2	0.338	0.332	0.349	7.31E-4	0.0105
3	0.330	0.233	0.309	4.66E-4	9.44E-3
4	0.289	0.178	0.277	3.66E-4	9.05E-3
5	0.261	0.152	0.250	3.89E-4	8.81E-3
10	0.194	0.0976	0.167	5.23E-4	8.46E-3
20	0.132	0.0799	0.0947	5.87E-4	8.33E-3

Tableau 3.15 : Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour une ligne de 300km (20 pôles,  $\Delta t = 1 \mu s$ )

Ndiv	$\Delta t = 1 \mu s$				
	Erreur max (pu)			Erreur max RP (pu)	
	VR1	VR2	VS2	VR1	VR2
1	0.375	0.596	0.417	7.03E-03	0.0283
2	0.283	0.365	0.378	3.63E-03	0.0168
3	0.266	0.260	0.344	2.28E-03	0.0132
4	0.249	0.200	0.314	1.64E-03	0.0114
5	0.233	0.162	0.288	1.32E-03	0.0104
10	0.217	0.110	0.195	6.21E-04	8.94E-3
20	0.182	0.104	0.105	4.15E-04	8.44E-3

Il faut rappeler ici que l'erreur en régime permanent de VR2 et VS2 est quasi-identique, comme on peut le voir sur la Figure 3-27.

On remarque que pour l'erreur maximale de VR2 et VS2, augmenter le nombre de sections réduit toujours l'erreur. Ce qui n'est pas toujours le cas pour VR1. Pour  $\Delta t = 1 \mu s$  cela est bien le cas, mais pour les deux autres pas de temps l'erreur maximale de VR1 augmente d'abord avant de décroître.

L'erreur en régime permanent est quant à elle toujours décroissante en augmentant le nombre de subdivision. Au niveau de la comparaison avec les différents pas de temps, on voit qu'il n'y a de comportement monotone sur les valeurs. Le cas optimal pour l'erreur en régime permanent de VR2 avec Ndiv=20 est par exemple le cas où  $\Delta t = 10 \mu s$ , alors que le cas optimal est atteint avec  $\Delta t = 20 \mu s$  pour Ndiv=3. Il y a le même cas de figure pour les erreurs maximales, il n'y a pas un pas de temps qui est meilleur qu'un autre si on compare toutes les différentes valeurs de Ndiv.

### Cas de câbles

On passe maintenant aux cas de câbles. Comme pour les cas précédent de câbles, la matrice **C** a été prise en faisant un lissage par éléments avec 5 pôles (voir section 2.2).

Comme pour la méthode sans subdivision, les problèmes de stabilité sont très présents. Le fait de subdiviser les câbles en section n'a pas modifié de manière radicale les résultats des simulations par rapport à ce problème. Une étude sur la précision en fonction du nombre de subdivision des cas stable a néanmoins été réalisée. Le tableau suivant présente ces résultats :

Tableau 3.16 : Erreur (pu) pour différent nombre de subdivision pour un câble1c de 10km (30 pôles) pour différents pas de temps et nombre de subdivision

$\Delta t$	Ndiv	Erreur max (pu*1e-5)			Erreur max RP (pu*1e-6)		
		IS1	IS2	IR2	IS1	IS2	IR2
10 $\mu$ s	1	5.257	6.760	1.714	3.898	7.116	8.464
1 $\mu$ s	1	4.340	4.887	1.769	3.951	6.990	8.395
10 $\mu$ s	2	6.211	7.522	1.324	4.221	7.083	8.474
5 $\mu$ s	2	3.326	4.669	1.448	4.271	7.017	8.443
4 $\mu$ s	3	3.007	4.196	1.287	4.336	7.010	8.455
2 $\mu$ s	3	1.171	2.477	1.449	4.355	6.963	8.409
2 $\mu$ s	5	1.820	2.686	1.301	4.381	6.984	8.446
1 $\mu$ s	10	1.122	1.732	1.432	4.400	6.977	8.451

Voici aussi un exemple de l'évolution de l'erreur dans le temps du dernier cas du tableau précédent :

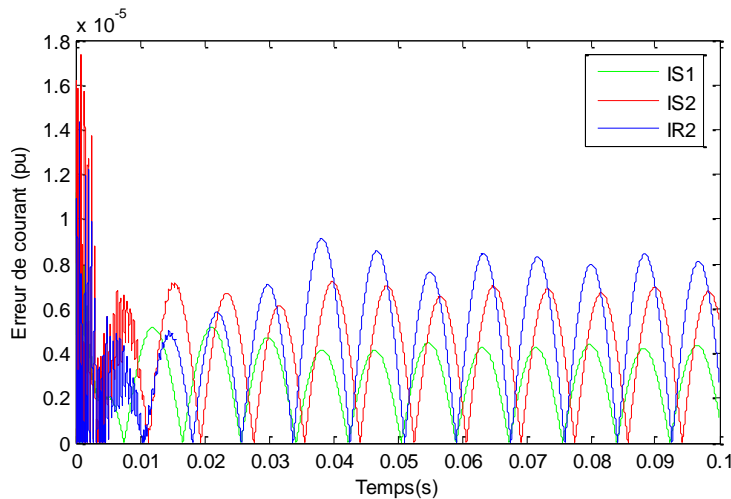


Figure 3-28 : Erreur absolue (pu) entre EMTP-RV et MdC, cas de câble1c (10km) divisée en 10 sections (30 pôles,  $\Delta t=1\mu s$ )

Le Tableau 3.16 comporte plusieurs pas de temps différents, ceci pour pouvoir comparer des cas stable.

En analysant les deux cas à 2 sections ou 3 sections, on voit que réduire le pas de temps améliore la précision pour l'erreur maximale de IS1 et IS2 mais pas pour IR2. Les variations sur l'erreur en régime permanent restent quant à elle très faibles.

En comparant les deux cas avec  $\Delta t = 1\mu s$  ( $N_{div} = 1$  et 10), on voit que l'erreur maximale est réduite pour les trois signaux mesurés, allant presque jusqu'à un facteur quatre pour IS1. Par contre l'erreur en régime permanent a légèrement augmentée en passant à dix sections. Mais ces comportements ne se reproduisent pas avec  $\Delta t = 2\mu s$  et  $N_{div} = 3$  et 5.

En résumé, le fait de subdiviser le câble en section permet surtout de réduire l'erreur maximale en général mais pas dans tous les cas. Comme il n'y a pas de réduction ou d'augmentation monotone de l'erreur avec l'accroissement du nombre subdivision ou du pas de temps, il est difficile de d'établir une règle sur l'évolution de ces erreurs en fonction de ces deux paramètres. De plus la subdivision n'a pas permis de retirer le problème dominant des câbles c'est-à-dire la stabilité.

## CONCLUSION

La méthode des caractéristiques proposée dans la littérature a été implémentée et testée sur plusieurs cas de lignes et de câbles. Son raisonnement a été défini et expliqué étape par étape, ainsi que l'ensemble des équations nécessaires à son implémentation. La méthode des caractéristiques malgré ses avantages de vitesses montre de sérieux problèmes de précision pour les lignes aériennes et de stabilité avec les câbles souterrains. Le cas de ligne montre des erreurs de tension sur les premières itérations qui peuvent dépasser 0.5 pu. Les câbles ont quant à eux une stabilité qui dépend du pas de temps utilisé et qui est aussi très sensible à la moindre variation sur la manière dont est réalisée l'interpolation de l'impédance série et de l'admittance shunt.

Des sources d'erreurs sont déjà dues au lissage de l'impédance série et de l'admittance shunt, dont l'apparition de vitesses modales supérieures à la vitesse de la lumière dans le vide.

D'autres sources se situent dans la résolution du système sur les courbes caractéristiques. Les interpolations linéaires temporelle et spatiale qui doivent être réalisées ne tiennent pas compte du mouvement des ondes. Les variantes proposées dans ce mémoire sont la méthode sans interpolation spatiale et la subdivision. La méthode sans interpolation spatiale n'a cependant pas réglé ce problème. La subdivision de la ligne a néanmoins montrée de sensibles améliorations sur la précision. Mais ceci se fait au prix de la vitesse car chaque division supplémentaire ajoute deux produits de convolution par pas de temps.

De nombreux tests ont été réalisés sur les différents paramètres du lissage pour essayer de déterminer un critère de stabilité sur les câbles. Mais aucune condition nécessaire ou suffisante n'a pu être déterminée.

## RÉFÉRENCES

- [1] J. Mahseredjian, A. Xémard, B. Khodabakhchian, "Régimes transitoires dans les réseaux électriques," *Technique de l'ingénieur Réseaux électriques linéaires*, vol. TIB258DUO, no. D82, Nov. 2007.
- [2] J. Mahseredjian, S. Denetière, L. Dubé, B. Khodabakhchian, L. Gérin-Lajoie, "On a new approach for the simulation of transients in power systems," *Electrical Power Systems Research*, vol. 77, no. 11, pp. 1514-1520, Sept. 2007.
- [3] A. Morched, B. Gustavsen, M. Tartibi, "A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 14, no. 3, pp. 1032-1038, Jul. 1999.
- [4] B. Gustavsen, "Passivity enforcement for transmission line models based on the method of characteristics," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 23, no. 4, pp. 2286-2293, Oct. 2008.
- [5] D. Deschrijver, B. Gustavsen, T. Dhaene, "Causality preserving passivity enforcement for travelling-wave-type transmission-line models," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 24, no. 4, pp. 2461-2462, Oct. 2009.
- [6] I. Kocar, J. Mahseredjian, "Improvement of numerical stability for the computation of transients in lines and cables," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 25, no. 2, pp. 1104-1111, Apr. 2010.
- [7] A. Semley, B. Gustavsen, "Phase-domain transmission-line modelling with enforcement of symmetry via the propagated characteristic admittance matrix," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 27, no. 2, pp. 626-631, Apr. 2012.
- [8] O. Ramos-Leaños, J.L. Naredo, J. Mahseredjian, C. Dufour, J.A. Gutierrez-Robles, I. Kocar, "A wideband line/cable model for real time simulations of power system transients," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 27, no. 4, pp. 2211-2218, Oct. 2012.
- [9] J.L. Naredo, "The effect of corona on wave propagation on transmission lines" PhD thesis, Dept. Elect. Eng., University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1992.
- [10] J.L. Naredo, P. Moreno, A.C. Soudack, J.R. Martí, "Frequency independent representation of transmission lines for transient analysis through the method of characteristics," in *Proc. Athens Power Tech. Nat. Tech. Univ. Athens IEEE/Power Eng. Soc. Joint Int. Power Conf.*, vol. 1, Athens, Greece, Sept. 5-8, 1993, pp. 28-32.
- [11] A. Ramirez, J.L. Naredo, L. Guardado, "Electromagnetic transients in overhead lines considering frequency dependence and corona effect via the method of characteristics," *Int. J. Electrical Power and Energy Systems*, vol. 23, no. 3, pp. 179-188, Aug. 2001.

- [12] A. Ramírez, J.L. Naredo, P. Moreno, "Full frequency-dependent line model for electromagnetic transient simulation including lumped and distributed sources," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 20, no. 1, pp. 292-299, Jan. 2005.
- [13] P. Moreno, A.R. Chavez, J.L. Naredo, "A simplified model for nonuniform multiconductor transmissions lines using the method of characteristics," in *Proc. IEEE/PES General Meeting*, Pittsburgh, 2008, pp. 1-5.
- [14] P. Moreno, A. Ambrosio, P. Gómez, "The characteristics approach for modelling single phase transmission lines with frequency dependent electrical parameters," in *IEEE/PES T&D Conference and Exposition*, Bogotá, Colombia, Aug. 2008, pp. 1-4.
- [15] J.C. Escamilla, P. Moreno, P. Gómez, "New model for overhead lossy multiconductor transmission lines," *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 7, no. 11, pp. 1185-1193, Nov. 2013.
- [16] B. Gustavsen, A. Semley, "Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting," *IEEE Tran. Power Del.*, vol. 15, no. 3, pp. 1052-1061, July. 1999.
- [17] B. Gustavsen, J. Nordstrom, "Pole identification for the universal line model based on the trace fitting," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 23, no. 1, pp. 472-479, Jan. 2008.
- [18] I. Kocar, J. Mahseredjian, G. Olivier, "Weighting method for transient analysis of underground cables," *IEEE Trans. Power Del.*, vol. 23, no. 3, pp. 1629-1635, Jul. 2008.